Übungsblatt 13

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 27.–30. 01. 2009
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis zum 3. 2. 2009

Aufgabe 100 ***mündlich***

Für eine Reihe von algorithmischen Problemstellungen wurden 6 verschiedene Algorithmen mit folgenden Laufzeiten entworfen ($\log n$ steht als Abkürzung für $\lceil \log_2 n \rceil$):

Algorithmus	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Laufzeit	$5 \cdot 10^8 n$	$10^5 n \log n$	$10^3 n^2$	$10 \cdot 2^{n/2}$	2^{2n}	$n!$

Die Algorithmen werden auf einem Rechner implementiert, der mit einer Geschwindigkeit von 10^9 Operationen pro Sekunde arbeitet.

(a) Bestimmen Sie jeweils die maximale Länge der Probleminstanzen, die mit diesen Algorithmen innerhalb einer Minute lösbar sind.

(b) Um wieviel vergrößert sich jeweils die maximale Eingabelänge, wenn ein Rechner mit 10facher Geschwindigkeit benutzt wird?

Aufgabe 101 ***mündlich***

Betrachten Sie die Menge der Palindrome $L = \{x \in \Sigma^* \mid x = x^R\}$. Beschreiben Sie eine möglichst zeiteffiziente 1-DTM M und eine möglichst zeiteffiziente 2-DTM M' für L. Vergleichen Sie die Laufzeiten von M und M' bei Eingaben der Länge n.

Aufgabe 102 ***10 Punkte***

Seien $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ Funktionen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) $\sum_{i=1}^{n} i = \mathcal{O}(n^2)$ *(mündlich)*

(b) $f(n) + \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n) + g(n))$ *(mündlich)*

(c) $\mathcal{O}(f(n) + g(n)) = f(n) + \mathcal{O}(g(n))$ *(mündlich)*

(d) $2^{n+\mathcal{O}(1)} = \mathcal{O}(2^n)$ *(mündlich)*

(e) $f(n) + g(n) = \mathcal{O}(\max\{f(n), g(n)\})$ *(mündlich)*

(f) Wenn $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, dann gilt $f^2(n) = \mathcal{O}(g^2(n))$ *(mündlich)*

(g) Wenn $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, dann gilt $f(n^2) = \mathcal{O}(g(n^2))$ *(5 Punkte)*

(h) $2^{\mathcal{O}(n)} = \mathcal{O}(2^n)$ *(5 Punkte)*

Aufgabe 103 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) $\mathsf{REG} \subsetneq \mathsf{L}$,

(b) $\mathsf{CFL} \subsetneq \mathsf{P}$,

(c) $\mathsf{L} \not\subseteq \mathsf{CFL}$.

Aufgabe 104 Zeigen Sie: ***10 Punkte***

(a) $\mathsf{E} \subseteq \mathsf{DTIME}(2^{n^2})$, *(mündlich)*

(b) $\mathsf{E} \subsetneq \mathsf{EXP}$. *(10 Punkte)*

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Diagonalsprache

$$D = \{w \mid M_w \text{ ist eine DTM, die } w \text{ in höchstens } 2^{|w|^2} \text{ Schritten verwirft}\}$$

in EXP, aber nicht in $\mathsf{DTIME}(2^{n^2})$ entscheidbar ist.

Aufgabe 105 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Jede Sprache $A \in \mathsf{DTIME}(t(n))$ ist in Polynomialzeit auf eine Sprache $B \subseteq \{0,1\}^*$ in $\mathsf{DTIME}(O(t(n)))$ reduzierbar.

(b) Die Sprache

$$L = \left\{ w\#x\#bin(m) \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in \{0,1\}^* \text{ und } M_w \text{ ist eine } k\text{-DTM, die} \\ x \text{ in höchstens } m \text{ Schritten akzeptiert} \end{array} \right\}$$

ist EXP-vollständig ($bin(m)$ bezeichne die Binärdarstellung von m).

(c) Der Abschluss von E unter $\leq^p$ ist EXP (d.h. $\mathsf{EXP} = \{A \mid \exists B \in \mathsf{E} : A \leq^p B\}$).

(d) E ist nicht unter $\leq^p$ abgeschlossen (also ist $\mathsf{P} \subsetneq \mathsf{E}$ und $\mathsf{E} \neq \mathsf{NP}$).

Hinweis: Verwenden Sie die Separation $\mathsf{E} \subsetneq \mathsf{EXP}$ (siehe Aufgabe 104).

Aufgabe 106 ***5 Punkte***

Eine boolesche Formel F heißt **Tautologie**, falls $F(a)$ für alle Belegungen a den Wert 1 annimmt. F heißt **monoton**, falls in F nur die Junktoren $\vee$ und $\wedge$ vorkommen. Klassifizieren Sie folgende Entscheidungsprobleme für boolesche Formeln entsprechend ihrer Komplexität als effizient lösbar (d.h. in P) bzw. nicht effizient lösbar (d.h. NP-hart oder co-NP-hart). Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $L_1 = \{F \mid F \text{ ist eine erfüllbare monotone Formel}\}$, *(mündlich)*

(b) $L_2 = \{F \mid F \text{ ist eine erfüllbare Formel der Form } G \to H\}$, *(mündlich)*

(c) $L_3 = \{F \mid F \text{ ist eine Tautologie der Form } G \to H\}$, *(mündlich)*

(d) $L_4 = \{F \mid F \text{ ist in KNF und es ex. eine Belegung } a \text{ mit } F(a) = 0\}$, *(mündlich)*

(e) $L_5 = \{F \mid \text{es gibt eine Belegung } a \text{ mit } F(a) = 0\}$. *(5 Punkte)*

Aufgabe 107 Zeigen Sie: ***5 Punkte***

Die Reduktionsrelation $\leq^p$ ist reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch.