Übungsblatt 11

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 13.–16. 01. 2009
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis zum 20. 1. 2009

Aufgabe 84 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Die Reduktionsrelation $\leq$ ist reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch.

(b) Die Klasse RE ist unter $\leq$ abgeschlossen.

(c) Jede entscheidbare Sprache A ist auf die Sprache $B = \{1\}$ reduzierbar (d.h. B ist REC-vollständig).

(d) Jede semi-entscheidbare Sprache A ist auf das Halteproblem H reduzierbar (d.h. H ist RE-vollständig).

Aufgabe 85 ***mündlich***

Für zwei Sprachen A und B sei die *markierte Vereinigung* $A \oplus B$ definiert durch

$$A \oplus B = \{0x \mid x \in A\} \cup \{1x \mid x \in B\}.$$

Zeigen Sie für beliebige Sprachen A, B und C:

(a) $A \leq A \oplus B$ und $B \leq A \oplus B$.

(b) $A \oplus B$ ist genau dann entscheidbar, wenn A und B entscheidbar sind.

(c) $A \oplus B$ ist genau dann semi-entscheidbar, wenn A und B semi-entscheidbar sind.

(d) Es gilt genau dann $A \oplus B \leq C$, wenn $A \leq C$ und $B \leq C$ gilt.

Aufgabe 86 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Durch $A \equiv B :\Leftrightarrow A \leq B$ und $B \leq A$ wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Sprachen definiert. (Die durch A repräsentierte Äquivalenzklasse $[A]$ wird auch der *Grad* (engl. *degree*) von A genannt und mit $deg(A)$ bezeichnet.)

(b) Durch $deg(A) \leq deg(B) :\Leftrightarrow A \leq B$ wird eine Ordnung auf der Menge der Grade definiert. (Zeigen Sie insbesondere, dass diese Ordnung wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist.)

(c) Jede endliche Menge von Graden besitzt ein Supremum.

Aufgabe 87 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Die Sprache $\{w\#x\#y \mid w, x, y \in \{0,1\}^* \text{ und } M_w(x) = y\}$ ist RE-vollständig.

(b) Eine Sprache A ist genau dann RE-vollständig, wenn $\bar{A}$ co-RE-vollständig ist.

(c) Die Klasse aller RE-vollständigen Sprachen und die Klasse aller co-RE-vollständigen Sprachen sind disjunkt.

Aufgabe 88 Entscheiden Sie die folgenden PCP-Instanzen: ***mündlich***

(a) $\begin{pmatrix} a & ba & abb & bab \\ ab & ab & bb & abb \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} aaaa & aa \\ aaa & aaaaa \end{pmatrix}$

Geben Sie im positiven Fall eine PCP-Lösung an und beweisen Sie im negativen Fall, dass keine PCP-Lösung existiert.

Aufgabe 89 ***12 Punkte***

Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $\{w \in \{0,1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \in \{0,1\}^* \text{ mit } M_w(w') = 0\}$, *(mündlich)*

(b) $\{w \in \{0,1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \in \{0,1\}^* \text{ mit } M_{w'}(w) = 0\}$, *(mündlich)*

(c) $\{w \in \{0,1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \neq w \text{ mit } L(M_w) = L(M_{w'})\}$, *(3 Punkte)*

(d) $\{w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) \text{ ist rekursiv aufzählbar}\}$, *(3 Punkte)*

(e) $\{w \in \{0,1\}^* \mid \overline{L(M_w)} \text{ ist semi-entscheidbar}\}$, *(3 Punkte)*

(f) $\{w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) \text{ ist abzählbar}\}$. *(3 Punkte)*

Aufgabe 90 ***10 Punkte***

Betrachten Sie die Sprache $\mathrm{Eq} = \{v\#w \mid L(M_v) = L(M_w)\}$. Zeigen Sie:

(a) Das Halteproblem lässt sich auf Eq reduzieren. *(4 Punkte)*

(b) Das Halteproblem lässt sich auf $\overline{\mathrm{Eq}}$ reduzieren. *(4 Punkte)*

(c) Weder Eq noch $\overline{\mathrm{Eq}}$ sind semi-entscheidbar. *(2 Punkte)*

Aufgabe 91 ***8 Punkte***

Beweisen sie folgende Variante des Satzes von Rice: Sei $\mathcal{S}$ eine Sprachklasse, so dass semi-entscheidbare Sprachen $A, B \subseteq \{0,1,\#\}^*$ existieren mit $A \in \mathcal{S}$ und $B \notin \mathcal{S}$. Dann ist die Sprache

$$L_{\mathcal{S}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) \in \mathcal{S}\}$$

unentscheidbar.