Übungsblatt 10

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 6.–9. 01. 2009
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis zum 13. 1. 2009

Aufgabe 75 ***mündlich***

Die Goldbachsche Vermutung lautet: Jede gerade Zahl größer 2 ist die Summe zweier Primzahlen. Es ist nicht bekannt, ob diese Vermutung richtig ist.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Funktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ berechenbar ist:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls die Goldbachvermutung richtig ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Beschreiben Sie informell eine DTM M, die bei einer beliebigen Eingabe $x \in \{0,1\}^*$ genau dann eine 0 ausgibt, wenn die Goldbachvermutung falsch ist.

Aufgabe 76 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass CSL eine echte Teilklasse von REC ist. (*Hinweis:* Betrachten Sie das Komplement D der Sprache $\{w \in \{0,1\}^+ \mid M_w$ ist eine 1-NTM, die die Eingabe $\hat{w}$ akzeptiert ohne dabei den Bereich der Eingabe zu verlassen$\}$.)

Aufgabe 77 ***mündlich***

Seien Σ, Γ Alphabete mit $\# \notin \Sigma \cup \Gamma$. Für eine partielle Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^* \cup \{\uparrow\}$ sei $\mathit{graph(f)} = \{x\#f(x) \mid x \in \mathit{dom(f)}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass eine partielle Funktion genau dann berechenbar ist, wenn die Sprache *graph(f)* semi-entscheidbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Graph *graph(f)* einer totalen Funktion f genau dann entscheidbar ist, wenn er semi-entscheidbar ist.

Aufgabe 78 ***mündlich***

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) A ist semi-entscheidbar,

(b) $\hat{\chi}_A$ ist berechenbar,

(c) A ist Definitionsbereich einer berechenbaren partiellen Funktion f.

Aufgabe 79 ***mündlich***

Sei Σ ein durch $<$ geordnetes Alphabet. Dann ist die *lexikographische Ordnung* $<$ auf Σ^* wie folgt definiert. Es ist $x < y$, falls gilt:

- $|x| < |y|$ oder
- $|x| = |y|$ und $\exists i \le |x| : x_1 \cdots x_{i-1} = y_1 \cdots y_{i-1}$ und $x_i < y_i$.

Eine Funktion $f : \Gamma^* \to \Sigma^*$ heißt *monoton*, falls $f(x) \le f(y)$ für alle Wörter $x \le y$ gilt. Eine Sprache A heißt *in lexikographischer Ordnung rekursiv aufzählbar*, falls A leer oder Bild einer monotonen berechenbaren Funktion ist. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) A ist entscheidbar,

(b) χ_A ist berechenbar,

(c) A ist in lexikographischer Ordnung rekursiv aufzählbar,

(d) A wird von einer DTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält.

(e) A wird von einer NTM akzeptiert, die bei keiner Eingabe eine unendliche Rechnung ausführt.

Aufgabe 80 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass jede unendliche semi-entscheidbare Sprache eine unendliche entscheidbare Teilmenge besitzt. (*Hinweis:* Konstruieren Sie eine Teilmenge, die in lexikographischer Ordnung rekursiv aufzählbar ist.)

Aufgabe 81 ***10 Punkte***

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) A ist vom Typ 0,

(b) A wird von einer 1-NTM akzeptiert.

Aufgabe 82 ***10 Punkte***

Gelten folgende Aussagen für beliebige semi-entscheidbare Sprachen A und beliebige entscheidbare Sprachen B? Begründen Sie.

(a) $A \setminus B$ ist entscheidbar,

(b) $A \setminus B$ ist unentscheidbar,

(c) $A \setminus B$ ist semi-entscheidbar,

(d) $B \setminus A$ ist entscheidbar,

(e) $B \setminus A$ ist semi-entscheidbar.

Aufgabe 83 ***10 Punkte***

Für $D \in \{L, R, N\}$ sei

$$L_D = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \begin{array}{l} M_w \text{ ist eine 1-DTM, die bei Eingabe } \varepsilon \\ \text{niemals die Kopfbewegung } D \text{ ausführt} \end{array} \right\}.$$

Für welche Werte von D ist L_D entscheidbar? Begründen Sie.