Übungsblatt 3

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 4.–7. 11. 2008
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis zum 11. 11. 2008

Aufgabe 16 ***mündlich***

Sei A die Menge aller Menschen. R_1 bezeichne die Relation »ist verheiratet mit«, R_2 die Relation »ist Mutter von« und R_3 die Relation »ist Kind von«. Beschreiben Sie umgangsprachlich die folgenden Kompositionen:

(a) $R_1 \circ R_2$, (b) $R_2 \circ R_1$, (c) $R_2 \circ R_3$, (d) $R_3 \circ R_2$, (e) $R_2 \circ R_1 \circ R_3$.

Aufgabe 17 ***mündlich***

Betrachten Sie folgende Relation R auf der Menge $V = \{0, 1, \ldots, 9\}$.

$$R = \{(2,4), (3,3), (3,6), (4,1), (4,2), (5,9), (7,5), (7,8), (8,5), (9,8)\}$$

(a) Welche Eigenschaften (reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv) hat diese Relation?

(b) Veranschaulichen Sie die Relationen R, R^T, $h_{\text{refl}}(R)$, $h_{\text{sym}}(R)$, $h_{\text{äq}}(R)$, R^2, R^3, R^+, R^* und $R^* \cap (R^*)^T$ jeweils durch einen Digraphen.

Aufgabe 18 ***mündlich***

Betrachten Sie die Relation $R = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c)\}$ auf der Menge $A = \{a,b,c,d\}$. Wieviele Paare müssen zu R jeweils mindestens hinzugefügt werden, um eine reflexive, symmetrische, antisymmetrische, transitive Relation bzw. eine Äquivalenzrelation auf A zu erhalten? Geben Sie diese Paare jeweils an.

Aufgabe 19 Zeigen Sie: ***5 Punkte***

(a) $h_{\text{refl}}(R) = R \cup Id_A$. *(mündlich)*

(b) $R^* = R^+ \cup R^0 = \bigcup_{i \geq 0} R^i$. *(mündlich)*

(c) Für eine Relation R auf einer n-elementigen Menge A ist *(mündlich)*

$$R^* = \bigcup_{i=0}^{n-1} R^i = (Id \cup R^{2^0}) \circ (Id \cup R^{2^1}) \circ \cdots \circ (Id \cup R^{2^{\lfloor \log(n-1) \rfloor}}).$$

(d) $h_{\text{sym}}(R) = R \cup R^T$. *(2 Punkte)*

(e) $R^+ = R \circ R^* = \bigcup_{i \geq 1} R^i$. *(3 Punkte)*

Aufgabe 20 Beweisen Sie: ***5 Punkte***

(a) R ist symmetrisch $\Rightarrow R^+, R^*$ sind symmetrisch. *(mündlich)*

(b) Jede reflexive Relation R mit $R \circ R^T \subseteq R$ ist symmetrisch. *(mündlich)*

(c) R ist genau dann transitiv, wenn $R^2 \subseteq R$ gilt. *(5 Punkte)*

Aufgabe 21 ***10 Punkte***

Auf der Menge $A = \mathbb{N}^+$ der positiven natürlichen Zahlen seien folgende Relationen definiert:

(a) $xRy :\Leftrightarrow x + y$ ist gerade, *(mündlich)*

(b) $xSy :\Leftrightarrow x + 2y$ ist durch 3 teilbar, *(3 Punkte)*

(c) $xTy :\Leftrightarrow |x - y| \leq 7$, *(3 Punkte)*

(d) $xUy :\Leftrightarrow xy$ ist eine Quadratzahl. *(4 Punkte)*

Welche dieser Relationen sind Äquivalenzrelationen? Geben Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen an und bestimmen Sie ein Repräsentantensystem.

Aufgabe 22 ***mündlich***

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Ein Wort $x \in \Sigma^*$ heißt *Teilwort* von y, falls $u, v \in \Sigma^*$ existieren mit $y = uxv$. Auf der Menge Σ^* sei folgende Relation definiert:

$$x \sqsubseteq y :\Leftrightarrow x \text{ ist ein Teilwort von } y.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sqsubseteq$ eine Ordnung auf Σ^* ist.

(b) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Einschränkung $\sqsubseteq_A$ von $\sqsubseteq$ auf die Menge $A = \{a, b, aa, ab, ba, aab, abb, bba, aabba\}$.

(c) Bestimmen Sie alle größten, kleinsten, minimalen und maximalen Elemente von A in der Ordnung $(A, \sqsubseteq_A)$.

(d) Bestimmen Sie obere und untere Schranken sowie Supremum und Infimum von $H := \{abb, bba\}$ in der Ordnung $(A, \sqsubseteq_A)$ (sofern vorhanden).

(e) Erweitern bzw. verkleinern Sie A um möglichst wenige Wörter aus Σ^* zu A', so dass H ein Supremum und ein Infimum in der Ordnung $(A', \sqsubseteq_{A'})$ besitzt.

Aufgabe 23 Betrachten Sie die Relation ***10 Punkte***

$$R = \{(0,1), (0,2), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\}^*$$

auf der Menge $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) Begründen Sie, dass R eine Ordnung auf A ist und zeichnen Sie das zugehörige Hasse-Diagramm. *(3 Punkte)*

(b) Geben Sie alle maximalen, minimalen, größten und kleinsten Elemente von A bzgl. R an. *(3 Punkte)*

(c) Welche Teilmengen von A besitzen zwar untere Schranken, aber kein Infimum? Begründen Sie. *(4 Punkte)*