Übungsblatt 2

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 9:10 Uhr am 4. November 2008.

Aufgabe 8 Seien A, B, C Sprachen. Zeigen oder widerlegen Sie: ***5 Punkte***

(a) $A(B \cup C) = AB \cup AC$, *(mündlich)*

(b) $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$, *(mündlich)*

(c) $A^+ = AA^*$, *(3 Punkte)*

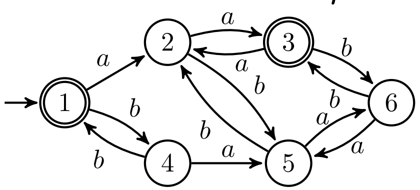
(d) $A(B \cap C) = AB \cap AC$. *(2 Punkte)*

Aufgabe 9 Betrachten Sie nebenstehenden DFA M: ***4 Punkte***

Geben Sie möglichst einfache reguläre Ausdrücke für folgende Sprachen an.

(a) $L^0_{1,2}$, $L^6_{2,1}$, $L^4_{2,5}$, *(mündlich)*

(b) $L^5_{1,3}$ und $L^5_{2,3}$. *(4 Punkte)*



Aufgabe 10 ***mündlich***

Wenn wir bei einem DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ eine Überführungsfunktion der Form $\delta : Z \times \Sigma \to Z \times \Sigma$ zulassen, dann können wir die zweite Komponente b des Werts $\delta(q, a) = (p, b)$ als Ausgabe von M bei diesem Rechenschritt interpretieren. M überführt also Eingaben x der Länge n in Ausgaben y der Länge n.

Geben Sie einen solchen DFA M mit dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ an, der eine Ganzzahl-Division durch 3 auf Binärzahlen ausführt. Zum Beispiel muss M die Eingabe 10001 (= 17) in die Ausgabe 00101 (= 5) überführen.

Aufgabe 11 ***4 Punkte***

Betrachten Sie folgende Sprachen über dem Alphabet $\{a, b\}$:

$$L_1 = \{u \mid u \text{ endet mit } b\} \text{ und } L_2 = \{v \mid \#_a(v) \text{ ist ungerade}\}.$$

(a) Geben Sie für L_1 und L_2 DFAs M_1 und M_2 mit jeweils 2 Zuständen an. *(mündlich)*

(b) Konstruieren Sie aus M_1 und M_2 einen NFA N für das Produkt $L = L_1L_2$ mit dem Verfahren aus der Vorlesung. *(mündlich)*

(c) Konstruieren Sie aus N einen NFA N' für die Sternhülle L^* von L mit dem Verfahren aus der Vorlesung. *(4 Punkte)*

Aufgabe 12 ***mündlich***

Ein ENFA (extended NFA) ist ein NFA $N = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$, wobei δ die Form

$$\delta : Z \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Z)$$

hat und $\{(z, w) \mid \delta(z, w) \neq \emptyset\}$ endlich ist. Der Zustandsgraph von N hat also nur endlich viele Kanten, die mit Wörtern $w \in \Sigma^*$ beschriftet sind. Ist eine Kante mit ε beschriftet, so spricht man von einem „spontanen“ Übergang, da N den Zustand wechselt, ohne ein Eingabezeichen zu lesen.

(a) Definieren Sie die von einem ENFA N erkannte Sprache formal.

(b) Zeigen Sie, dass $\{L(N) \mid N \text{ ist ein ENFA}\} = \mathsf{REG}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass ohne die Einschränkung „$\{(z, w) \mid \delta(z, w) \neq \emptyset\}$ ist endlich“ jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ von einem ENFA erkannt wird.

Aufgabe 13 ***mündlich***

Sei $L_1 \subseteq \{a, b\}^*$ die Sprache der Wörter, die aba als Teilwort enthalten.

(a) Geben Sie einen NFA N für L_1 an.

(b) Überführen Sie N in einen DFA. Wenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung an.

(c) Geben Sie reguläre Ausdrücke für L_1 und für $\overline{L}_1$ an.

Aufgabe 14 ***7 Punkte***

Sei $L_2 \subseteq \{a, b\}^*$ die Sprache der Wörter, die das Teilwort $abaab$ enthalten.

(a) Geben Sie einen NFA N für L_2 an. *(2 Punkte)*

(b) Überführen Sie N in einen DFA. Wenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung an. *(2 Punkte)*

(c) Geben Sie reguläre Ausdrücke für L_2 und für $\overline{L}_2$ an. *(3 Punkte)*

Aufgabe 15 ***10 Punkte***

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass dann auch die folgenden Sprachen regulär sind, indem Sie aus einem DFA für L einen DFA (oder NFA) für diese Sprachen konstruieren.

(a) $\mathit{prefix}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* : xy \in L\}$, *(mündlich)*

(b) $L^R = \{x^R \mid x \in L\}$, *(mündlich)*
(x^R bezeichnet das gespiegelte Wort, z.B. $abcd^R = dcba$)

(c) $\mathit{cycle}(L) = \{vu \in \Sigma^* \mid uv \in L\}$, *(mündlich)*

(d) $\mathit{suffix}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* : yx \in L\}$, *(2 Punkte)*

(e) $L^+ = \bigcup_{n \geq 1} L^n$, *(3 Punkte)*

(f) $L/2 = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* : xy \in L, |x| = |y|\}$. *(5 Punkte)*