

Übungsblatt 9

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15. Januar 2008

Aufgabe 43

mündlich

Zeigen Sie, dass aus $\text{NP} \subseteq \text{BPP}$ die Gleichheit $\text{NP} = \text{RP}$ folgt. (*Hinweis:* Benutzen Sie einen BPP-Algorithmus für SAT, um für eine gegebene Formel $F \in \text{SAT}$ mit hoher Wahrscheinlichkeit eine erfüllende Belegung zu finden).

Aufgabe 44

mündlich

Sei $\rho \in [0, 1]$ eine beliebige reelle Zahl. Eine ρ -PTM ist eine PTM mit maximalem Verzweigungsgrad 2, die eine ρ -Münze benutzt: Sind in einer Konfiguration K zwei Anweisungen mit verschiedenen Folgekonfigurationen K' und K'' ausführbar, so gilt $\Pr[K \rightarrow_M K'] = \rho$ und $\Pr[K \rightarrow_M K''] = 1 - \rho$. Ersetzen wir in der Definition von PP, BPP, RP und ZPP PTMs durch ρ -PTMs, so führt dies auf die Klassen PP_ρ , BPP_ρ , RP_ρ und ZPP_ρ . Zeigen Sie:

- Für $\rho \in \{0, 1\}$ gilt $\text{PP}_\rho = \text{BPP}_\rho = \text{RP}_\rho = \text{ZPP}_\rho = \text{P}$.
- Für $\rho \in (0, 1)$ kann jede PTM M durch eine ρ -PTM M' mit derselben Akzeptanzwahrscheinlichkeit in erwarteter Laufzeit $\mathcal{O}(\text{time}_M(x))$ simuliert werden.
- Jede ρ -PTM M kann durch eine PTM M' mit derselben Akzeptanzwahrscheinlichkeit in erwarteter Laufzeit $\mathcal{O}(\text{time}_M(x))$ simuliert werden, falls ρ P-berechenbar ist (d.h. das n -te Bit b_n der Binärrepräsentation $0.b_1b_2\dots$ von ρ ist in Zeit $n^{\mathcal{O}(1)}$ berechenbar).
- Für jedes P-berechenbare $\rho \in (0, 1)$ gilt $\text{BPP} = \text{BPP}_\rho$ (entsprechend für RP und ZPP).
- Es gibt Zahlen $\rho \in (0, 1)$ mit $\text{PP} \neq \text{PP}_\rho$ (sogar $\text{PP}_\rho \not\subseteq \text{RE}$).

Aufgabe 45 Zeigen Sie:

mündlich

PSPACE ist unter jedem Operator $O \in \{\exists, \forall, \text{R}, \text{BP}, \text{P}, \oplus\}$ abgeschlossen.

Aufgabe 46 Zeigen Sie:

mündlich

- PH ist die kleinste Klasse, die P enthält und unter dem \exists -Operator und dem \forall -Operator abgeschlossen ist.
- $\text{PH} \neq \text{PSPACE}$, außer wenn PH kollabiert.

Aufgabe 47

10 Punkte

Zeigen Sie für jede Sprachklasse \mathcal{C} , die unter \leq_m^{log} -Reduktionen abgeschlossen ist:

- $\oplus \cdot \mathcal{C}$ ist unter \leq_m^{log} -Reduktionen abgeschlossen,
- $\oplus \cdot \mathcal{C}$ ist unter dem \oplus -Operator abgeschlossen,
- $\exists \cdot \mathcal{C}$ ist unter dem \exists -Operator abgeschlossen,
- $\forall \cdot \mathcal{C}$ ist unter dem \forall -Operator abgeschlossen,