KOMPLEXITÄTSTHEORIE — Wintersemester 2008/09
PROF. JOHANNES KÖBLER — 9. Dezember 2008

Übungsblatt 8

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 8. Januar 2009

Aufgabe 38 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ liegt genau dann in PP, wenn es ein Polynom p und eine p-balancierte Sprache $B \in \mathsf{P}$ gibt, so dass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$x \in L \Leftrightarrow \|\{y \in \{0,1\}^* \mid x\#y \in B\}\| \geq 2^{p(|x|)-1}.$$

(b) MajSAT ist PP-vollständig und es gilt $\mathsf{PP} \subseteq \mathsf{PSPACE}$.

Aufgabe 39 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass eine Sprache L genau dann in RP liegt, wenn es eine PTM M gibt, die niemals ? ausgibt, keinen Fehler macht (d.h. es gilt $\Pr[M(x) = \bar{L}(x)] = 0$ für alle x) und deren erwartete Laufzeit bei allen Eingaben $x \in L$ polynomiell beschränkt ist. Finden Sie eine analoge Charakterisierung für $L \in \mathsf{ZPP}$.

Aufgabe 40 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass nicht jede von einer PTM in erwarteter Laufzeit $n^{\mathcal{O}(1)}$ akzeptierte Sprache in PP liegt.

Aufgabe 41 ***mündlich***

Für eine PTM M und eine Eingabe x sei $\text{bias}_M(x) = \Pr[M(x) = 1] - 1/2$. Zeigen Sie, dass jede von einer PPTM M mit $|\text{bias}_M(x)| = 1/|x|^{\mathcal{O}(1)}$ akzeptierte Sprache in BPP liegt.

Aufgabe 42 ***10 Punkte***

Betrachten Sie folgenden probabilistischen Algorithmus.

Algorithmus: `RandomWalk`

Input: KNF-Formel $F(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 1$, ohne Einerklauseln
  wähle eine beliebige Belegung a, z.B. $a(x_i) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$
  while $F(a) = 0$ **do**
    wähle eine beliebige Klausel C von F mit $C(a) = 0$
    wähle zufällig ein Literal l in C
    flippe den Wert von $a(l)$
Output: a

Sei F eine 2-KNF-Formel (o. B. d. A. ohne Einerklauseln) und sei h eine Belegung, die F erfüllt. Zeigen Sie, dass die erwartete Laufzeit von RANDOMWALK(F) polynomiell beschränkt ist.

Hinweis: Zeigen Sie folgende Abschätzungen für die erwartete Anzahl $t(i)$ von Schleifendurchläufen, falls die Anfangsbelegung a in genau i Variablen von h abweicht:

1. $t(0) = 0$ und $t(n) \leq t(n-1) + 1$,
2. $t(i) \leq 1 + (t(i-1) + t(i+1))/2$ für $i = 1, \ldots, n-1$,
3. $t(i) \leq i(2n - i)$ für $i = 0, \ldots, n$.