Übungsblatt 5

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 27. November 2008

Aufgabe 22 ***mündlich***

Geben Sie eine Sprache L an, so dass weder L noch $\overline{L}$ rekursiv aufzählbar ist.

Aufgabe 23 ***mündlich***

Seien $f, g, t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ echte Komplexitätsfunktionen mit $t(n) \geq n$. Für eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ sei die Sprache A_t definiert durch

$$A_t = \{x\#^{t(|x|)-|x|} \mid x \in A\}.$$

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz

$$A \in \mathsf{DTIME}(f(t(n))) \Leftrightarrow A_t \in \mathsf{DTIME}(f(n)).$$

(b) Zeigen Sie die Implikation

$$\mathsf{DTIME}(f(n)) = \mathsf{DTIME}(g(n)) \Rightarrow \mathsf{DTIME}(f(t(n))) = \mathsf{DTIME}(g(t(n))).$$

(c) Zeigen Sie für $j, k \geq 1$ und $a > 0$ die Implikationen

$$\begin{aligned}
\mathsf{DTIME}(n^k) = \mathsf{DTIME}(n^k \log^a n) &\Rightarrow \mathsf{DTIME}(2^n) = \mathsf{DTIME}(2^n n^a),\\
\mathsf{DTIME}(2^n) = \mathsf{DTIME}(2^n n^a) &\Rightarrow \mathsf{DTIME}(2^{2^n+(j-1)an}) = \mathsf{DTIME}(2^{2^n+jan}),\\
\mathsf{DTIME}(2^n) = \mathsf{DTIME}(2^n n^a) &\Rightarrow \mathsf{DTIME}(2^{2^n}) = \mathsf{DTIME}(2^{2^n+(a+1)n}).
\end{aligned}$$

(d) Schließen Sie hieraus $\mathsf{DTIME}(n^k) \subsetneq \mathsf{DTIME}(n^k \log^a n)$ für $k \geq 1$ und $a > 0$.

Aufgabe 24 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass die folgenden Sätze für beliebige Komplexitätsmaße gelten.

(a) Gap Theorem (siehe Vorlesung)
(b) Compression Theorem (Aufgabe 19)
(c) Union Theorem (Aufgabe 21)

Aufgabe 25 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass die $\leq_m^{log}$-Reduzierbarkeit reflexiv und transitiv ist.

Aufgabe 26 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass aus $\mathsf{E} = \mathsf{NE}$ folgt, dass $\mathsf{EXP} = \mathsf{NEXP}$ ist.

Aufgabe 27 ***10 Punkte***

Zeigen Sie, dass die Komplexitätsklassen NP und E verschieden sind. Betrachten Sie hierzu die Sprache

$$K = \{\langle M, x, 1^t\rangle \mid \text{die DTM } M \text{ akzeptiert } x \in \{0,1\}^* \text{ in } \leq 2^t \text{ Schritten}\}$$

und zeigen Sie:

(a) K ist E-vollständig.
(b) Eine Sprache ist genau dann E-hart, wenn sie EXP-hart ist.
(c) E ist nicht unter $\leq_m^{log}$ abgeschlossen.