Übungsblatt 4

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 20. November 2008

Aufgabe 17 ***mündlich***

Die Klasse der quantifizierten booleschen Formeln (Q-Formeln) ist induktiv wie folgt definiert:

(1) Jede boolesche Formel über den Junktoren $\neg$, $\vee$ und $\wedge$ ist eine Q-Formel.
(2) Ist G eine Q-Formel, so auch $\exists x G$ und $\forall x G$.

Sei F eine Q-Formel mit freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und sei $a = a_1 \ldots a_n \in \{0,1\}^n$ eine Belegung. Der Wert von F unter a ist dann $F(a)$, falls F quantorenfrei ist, $G(a0) \vee G(a1)$, falls $F = \exists y\, G(x_1, \ldots, x_n, y)$ ist, und $G(a0) \wedge G(a1)$, falls $F = \forall y\, G(x_1, \ldots, x_n, y)$ ist. Zeigen Sie, dass das Entscheidungsproblem QBF (True Quantified Boolean Formulas), definiert durch

Gegeben: Eine Q-Formel F
Gefragt: Ist F unter allen Belegungen wahr?

in PSPACE entscheidbar ist.

Aufgabe 18 ***mündlich***

Seien Φ und Φ' zwei Komplexitätsmaße. Zeigen Sie, dass es dann eine rekursive Funktion r gibt, so dass für alle Turingmaschinen M und für fast alle x gilt: $\Phi(M,x) \leq r(x, \Phi'(M,x))$.

Aufgabe 19 (Compression Theorem) Zeigen Sie: ***mündlich***

Es gibt eine rekursive Sprache L, so dass es für jede $s(n)$-platzbeschränkte DTM M mit $L(M) = L$ eine DTM M' gibt mit $L(M') = L$ und $\text{space}_{M'}(x) \leq \log s(|x|)$ für fast alle Eingaben x.

Hinweis: Definieren Sie die Funktion S durch $S(n) = 2$ für $n \leq 0$ und $S(n+1) = 2^{S(n)}$ für $n > 0$, und konstruieren Sie bezüglich einer geeigneten Aufzählung $M_1, M_2, \ldots$ aller DTMs eine Sprache $L \subseteq \{0\}^*$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Falls M_i die Sprache L entscheidet, so gilt $s_i(n) \geq S(n-i)$ für fast alle n ($s_i(n)$ bezeichnet den maximalen Platzverbrauch von M_i bei Eingaben der Länge n).
2. Für alle $k \geq 1$ gibt es eine DTM M_i mit $s_i(n) \leq S(n-k)$, die L entscheidet.

Aufgabe 20 Beweisen Sie den Platzhierarchiesatz: ***mündlich***

Ist f eine echte Komplexitätsfunktion und gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0,$$

dann ist $\mathsf{DSPACE}(f(n)) \setminus \mathsf{DSPACE}(g(n)) \neq \emptyset$.

Aufgabe 21 (Union Theorem) Zeigen Sie: ***10 Punkte***

Es gibt eine rekursive Funktion S mit $\mathsf{DSPACE}(S(n)) = \mathsf{PSPACE}$.

Hinweis: Definieren Sie $S(n)$ bezüglich einer Aufzählung $M_1, M_2, \ldots$ aller DTMs, so dass die beiden folgenden Bedingungen gelten:

1. Für alle k gilt $S(n) \geq n^k$ für fast alle n.
2. Falls der Platzbedarf $s_i(n)$ von M_i für alle k die Bedingung $s_i(n) > n^k$ für unendlich viele n erfüllt, dann gilt auch $s_i(n) > S(n)$ für unendlich viele n.