Übungsblatt 3

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 13. November 2008

Aufgabe 11 ***mündlich***
Zeigen Sie, dass $n \mapsto k$, $n \mapsto \lceil \log n \rceil$, $n \mapsto \lceil \log^k n \rceil$, $n \mapsto \lceil n \cdot \log n \rceil$, $n \mapsto n^k + k$, $n \mapsto 2^n$ und $n \mapsto n! \cdot \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ für jede Konstante $k \in \mathbb{N}$ echte Komplexitätsfunktionen sind.

Aufgabe 12 ***mündlich***
Zeigen Sie, dass die Komplexitätsklassen P und NP abgeschlossen sind unter Vereinigung, Schnitt und dem Kleene-Stern. Der **Kleene-Stern** einer Sprache L ist definiert durch

$$L^* = \{x_1 \dots x_k \mid k \geq 0 \text{ und } x_1, \dots, x_k \in L\}.$$

Aufgabe 13 ***mündlich***
Zeigen Sie, dass $\mathsf{DSPACE}(\log \log n)$ nichtreguläre Sprachen enthält.
Hinweis: Betrachten Sie die Sprache $L = \{bin(1)\# \cdots \# bin(n) \mid n \geq 1\}$, wobei $bin(i)$ die Binärdarstellung der Zahl i (ohne führende Nullen) ist.
Bemerkung: Es lässt sich zeigen, dass $\mathsf{DSPACE}(o(\log \log n)) = \mathsf{REG}$ ist.

Aufgabe 14 ***mündlich***
Zeigen Sie, dass eine Sprache L genau dann in $\mathsf{NTIME}(t) \cap \text{co-}\mathsf{NTIME}(t)$ liegt, falls eine $t(n)$-zeitbeschränkte NTMM mit $L(M) = L$ existiert, die auf allen Eingaben strong ist.

Aufgabe 15 (Blum Komplexität) ***mündlich***
Eine partielle Funktion Φ, die (geeignete Kodierungen von) TMs M und Eingaben x in die natürlichen Zahlen abbildet, heißt **Komplexitätsmaß**, falls sie folgende Axiome erfüllt:

Axiom 1: $\Phi(M, x)$ ist genau dann definiert, wenn $M(x)$ definiert ist.
Axiom 2: Die Frage, ob $\Phi(M, x) = m$ gilt, ist entscheidbar.

Welche der folgenden Funktionen sind Komplexitätsmaße?

(a) $time_M(x)$ und $space_M(x)$ für DTMs und NTMs.
(b) $ink_M(x)$: Anzahl der Ersetzungen eines Symbols durch ein anderes Symbol.
(c) $carbon_M(x)$: Anzahl der Ersetzungen eines Symbols durch das *gleiche* Symbol.

Dabei sollen $ink_M(x)$ und $carbon_M(x)$ (wie $space_M(x)$) nur dann definiert sein, wenn $M(x)$ nur Rechnungen endlicher Länge ausführt.

Aufgabe 16 ***10 Punkte***
Zeigen Sie, dass aus $\mathsf{E} \neq \mathsf{NE}$ folgt, dass $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ ist (*downward separation*).
Hinweis: Betrachten Sie die "tally Version" einer Sprache $A \subseteq \{0,1\}^*$,

$$tally(A) = \{0^{num(1x)} \mid x \in A\},$$

wobei $num(1x)$ die durch die Binärzahl $1x$ repräsentierte natürliche Zahl ist, und zeigen Sie die Äquivalenzen

$$A \in \mathsf{E} \Leftrightarrow tally(A) \in \mathsf{P} \text{ bzw. } A \in \mathsf{NE} \Leftrightarrow tally(A) \in \mathsf{NP}.$$