INSTITUT FÜR INFORMATIK
KOMPLEXITÄT UND KRYPTOGRAFIE
PROF. DR. JOHANNES KÖBLER

WS 2007/08
13. NOVEMBER 2007

Theoretische Informatik 2

5. Übung

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 20.-23. November
Abgabe der schriftlichen Lösungen am 27. November

Aufgabe 26 [*mündlich*]

Wenn wir bei einem DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ eine Überführungsfunktion der Form $\delta : Z \times \Sigma \to Z \times \Sigma$ zulassen, dann können wir die zweite Komponente b des Werts $\delta(q, a) = (p, b)$ als Ausgabe von M bei diesem Rechenschritt interpretieren. M überführt also Eingaben x der Länge n in Ausgaben y der Länge n.

Geben Sie einen solchen DFA M mit dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ an, der eine Ganzzahl-Division durch 3 auf Binärzahlen ausführt. (Zum Beispiel muss M die Eingabe 10001 (= 17) in die Ausgabe 00101 (= 5) überführen.)

Aufgabe 27 [*mündlich*]

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA und sei

$$D_i = \begin{cases} \{\{p, q\} \mid q \in E, p \notin E\}, & i = 0 \\ D_{i-1} \cup \{\{p, q\} \mid \exists a \in \Sigma : \{\delta(p, a), \delta(q, a)\} \in D_{i-1}\}, & i > 0 \end{cases}$$

die in der Vorlesung zur Konstruktion von M' benutzte Folge.

a) Zeigen Sie, dass $D_i = \{\{p, q\} \mid \exists x \in \Sigma^{\leq i} : x \in L_q \Delta L_p\}$ ist. Dabei enthält $\Sigma^{\leq n}$ alle Wörter in Σ^* der Länge höchstens n.

b) Zeigen Sie, dass im Fall $D_j = D_{j+1}$ für alle $k \geq j$ gilt: $D_j = D_k = \{\{p, q\} \subseteq Z \mid q \not\sim p\}$.

c) Leiten Sie eine möglichst gute obere Schranke für die benötigte Anzahl $\min\{j \geq 0 \mid D_j = D_{j+1}\}$ der Iterationen in Abhängigkeit von der Anzahl $m = \|Z\|$ der Zustände von M her.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $E_i = \{(p, q) \in Z^2 \mid \{p, q\} \notin D_i\}$ eine Äquivalenzrelation auf Z ist.

Aufgabe 28 [*mündlich*]

Konstruieren Sie den Minimal-Automaten M_{R_L} für die Sprache $L \subseteq \{a, b\}^*$ aller Wörter, die bbb nicht als Teilwort enthalten.

Aufgabe 29 [*mündlich*]

Gegeben seien die beiden Grammatiken

$$G_1 = \big(\{S\},\ \{a, b\},\ \{S \to ababS, abab\},\ S\big) \text{ und}$$
$$G_2 = \big(\{S, T\},\ \{a, b\},\ \{S \to aS, abT;\ T \to aT, abS, ab\},\ S\big).$$

a) Geben Sie jeweils reguläre Ausdrücke für die Sprachen an, die durch diese Grammatiken erzeugt werden.

b) Geben Sie jeweils eine links- und eine rechtsreguläre Grammatik an, die dieselbe Sprache erzeugt. Eine linksreguläre Grammatik darf hierbei nur Produktionen der Bauart $A \to a$, $A \to Ba$ oder $A \to \varepsilon$ enthalten. Der Begriff einer rechtsregulären Grammatik ist analog definiert, entspricht also dem in der Vorlesung definierten Typ einer regulären Grammatik.

Aufgabe 30 [*4 Punkte*]

Finden Sie Grammatiken für die folgenden Sprachen über $\Sigma = \{a, b\}$:

$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid$ in w kommt $abab$ als Teilwort vor$\}$, (*mündlich*)

$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid$ jeder zweite Buchstabe in w ist ein $a\}$, (*mündlich*)

$L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid$ in w kommen doppelt soviele a's wie b's vor$\}$. (*4 Punkte*)

Aufgabe 31 [*6 Punkte*]

Sei $A = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0\}$, und B sei die Menge der Dezimaldarstellungen aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen.

a) Geben Sie alle Zerlegungen der Wörter $aaabb$ (bezüglich A) und 123456 (bezüglich B) in Teilwörter uvw an, die für $\ell = 4$ alle drei Bedingungen in der Konklusion des Pumping-Lemmas erfüllen.

b) Bestimmen Sie die Pumping-Zahlen für A und B.