II. Zufallsvariablen

5 Zufallsvariablen, Grundbegriffe

Def. 12 *Es seien* $(\Omega_1, \mathcal{E}_1, P_1)$ *und* $(\Omega_2, \mathcal{E}_2, P_2)$ *Wahrscheinlichkeitsräume. Eine Abbildung*

$$X : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$$

heißt $\underline{\mathcal{E}_1\text{–}\mathcal{E}_2\text{–meßbar}}$*, falls für alle Ereignisse* $A \in \mathcal{E}_2$ *gilt:*

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega_1 : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{E}_1.$$

Bem.: Oftmals wird die Menge $\mathcal{B}^1$ der BOREL–Mengen als Ereignisfeld $\mathcal{E}_2$ betrachtet.

Def. 13 *Es sei $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine $\mathcal{E}$–$\mathcal{B}^1$–meßbare Abbildung X von Ω in $\mathbb{R}$ heißt (reellwertige) zufällige Variable oder Zufallsgröße.*

Bem.: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, P')$ bildet hier den zweiten Wahrscheinlichkeitsraum, wobei P' eine Abbildung von $\mathcal{B}^1$ in $\mathbb{R}$ ist, die den KOLMOGOROFF–Axiomen genügt.

Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, P)$.
$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. sei eine zufällige (reellwertige) Variable.

Den zweiten Wahrscheinlichkeitsraum bezeichnen wir mit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, P_X)$. Es sei $B \in \mathcal{B}^1$ ein zufälliges Ereignis, für das gilt:

$$B =]-\infty, x[,$$

wobei x eine beliebige, fest gewählte reelle Zahl ist. Mit $\{X < x\}$ bezeichnen wir das zufällige Ereignis, für das gilt:

$$\{X < x\} := \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) < x\}.$$

Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses:

$$\begin{aligned} P(X < x) &= P(\{\omega \colon X(\omega) < x\}) = P(\{\omega \colon X(\omega) \in B\}) \\ &= P(X^{-1}(B)) =: P_X(B) \end{aligned}$$

Für alle zufälligen Ereignisse $B \in \mathcal{B}^1$ bezeichnen wir also:
$\underline{P_X(B) := P(X^{-1}(B)).}$

Def. 14 *Es sei* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine zufällige Variable,* $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ *und* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, P_X)$ *seien Wahrscheinlichkeitsräume.*

Dann heißt die Funktion

$$F_X(x) := P(X < x) = P_X\left(]-\infty, x[\right)$$

Verteilungsfunktion von X.

Bem.: Der Einfachheit halber werden wir die Funktion F_X einfach nur mit F bezeichnen.

Bem.: Manchmal wird die Verteilungsfunktion auch durch

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

definiert (bei SAS z.B.)

Diskrete Zufallsvariablen

Eine diskrete Zufallsgröße X nimmt höchstens abzählbar viele verschiedene Werte mit positiver Wahrscheinlichkeit an. Das heißt, X ist eine Abbildung der folgenden Form:

$$X : \Omega \longrightarrow \{x_i : i \in \mathbb{N}\} =: W \subset \mathbb{R}.$$

Wir notieren das in der Form:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}$$

Dabei sind die $x_i \in \mathbb{R}$ die Werte, die die Zufallsgröße annehmen kann. Die p_i sind die Wahrscheinlichkeiten, mit denen diese Werte angenommen werden. Es gilt:

$$p_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1, \qquad p_i = P(X = x_i).$$

Wenn wir Mengen A_i definieren durch

$$A_i := \{\omega \colon X(\omega) = x_i\}, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

so gilt offenbar:

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \qquad \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j.$$

Allgemein gilt dann:

$$P(X = x) = \begin{cases} p_i, & \text{falls } x = x_i \\ 0, & \text{falls } x \neq x_i \end{cases} \qquad \forall x_i \in W, \; i \in \mathbb{N}.$$

Das bedeutet für die Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X < x) = P\left(\bigcup_{i:\, x_i < x} A_i\right) \\ &= \sum_{i:\, x_i < x} P(A_i) = \sum_{i:\, x_i < x} p_i \end{aligned}$$

D.h.: Eine diskrete Zufallsgröße, die die Werte $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ annimmt, wobei $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ gilt, hat die folgende Verteilungsfunktion:

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq x_1 \\ \sum\limits_{i:\, x_i < x} p_i, & \text{falls } x_1 < x \end{cases}}$$

Betrachten wir eine Menge $B \in \mathcal{B}^1$, so können wir feststellen:

$$P_X(B) = P(\{\omega\colon X(\omega) \in B\}) = \sum_{i\colon x_i \in B} p_i.$$

Bsp. 31 *Es sei*

$$X: \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Die Zufallsvariable X heißt diskret gleichverteilt auf der Menge $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Bsp. 32 *Sei X eine diskrete Zufallsgröße,*

$$X: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & n \\ p_0 & p_1 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$$

mit

$$P(X = i) = p_i = \binom{n}{i} p^i \cdot (1-p)^{n-i} > 0, \qquad \textit{mit } 0 < p < 1.$$

Bez. 1 *Die Zufallsvariable* X *heißt binomialverteilt, bez.:* $X \sim B(p, n)$ *oder* $X \sim Bi(p, n)$.

Wir haben oben gesehen, daß

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = (p + 1 - p)^n = 1.$$

Bsp. 33 *Es sei* X *eine diskrete Zufallsgröße,*

$$X: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & n & \ldots \\ p_0 & p_1 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}$$

mit

$$P(X = n) = p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Bez. 2 *Die Zufallsvariable X heißt* POISSON–*verteilt, bez.:* $X \sim Poi(\lambda)$.

Wir haben oben gesehen, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}}_{=e^{\lambda}} = 1$$

Stetige Zufallsvariablen

Def. 15 *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Dichtefunktion, falls sie die folgenden Eigenschaften hat:*

1. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) \geq 0$.*
2. *Es gilt: $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$.*

Def. 16 *Eine zufällige Variable X heißt stetig, falls eine Dichtefunktion f existiert, so daß gilt:*

$$P(X < x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Falls die Funktion f stetig ist, gilt: $F'(x) = f(x)$.

Bem.: Für die Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$ gilt

$$P(X = x) = \int_{x}^{x} f(t)\,dt = 0,$$

sogar wenn X den Wert x tatsächlich annehmen kann! Das heißt jedoch nichts anderes, als daß gilt:

$$P(X \leq x) = P(X < x).$$

Außerdem gilt:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt.$$

Veranschaulichung: Es sei X eine stetige Zufallsgröße. Wir teilen den Wertebereich von X in Intervalle I_j ein und beobachten für jeden der Versuche X_i, in welches der Intervalle I_j der Wert X_i ($i = 1, \ldots, n$) fällt. Es sei $n_j = \#\{X_i \in I_j\}$. Die Länge eines Intervalls I_j bezeichnen wir mit $\Delta(I_j) = \Delta_j$. Desweiteren sei $\Delta_0 = \max_j \{\Delta_j\}$. Wir definieren nun folgende Funktion:

$$f_{emp.}(x) = \frac{\frac{n_j}{n}}{\Delta_j}, \ \forall x \in I_j.$$

Dann gilt:

$$f(x) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta_0 \to 0}} f_{emp.}(x).$$

`Dichtefunktion_allg.sas`

Bsp. 34 *Es sei die Zufallsvariable* X *auf dem Intervall* $[0,1[$ *definiert mit der Verteilungsfunktion*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{falls } x < 0 \\ x, & \textit{falls } 0 \le x < 1 \\ 1, & \textit{falls } x \ge 1 \end{cases} .$$

Bez. 3 *Die Zufallsvariable* X *heißt auf dem Intervall* $[0,1[$
gleichverteilt,
bez. $X \sim R(0,1)$ *oder* $X \sim U(0,1)$.

Die Dichtefunktion ist die Funktion f;

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ 1, & \text{falls } 0 \le x < 1 \\ 0, & \text{falls } x \ge 1 \end{cases} .$$

Ist X gleichverteilt auf dem Intervall $[a, b[$, $X \sim R(a, b)$, so hat X die Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < a \\ \frac{1}{b-a}, & \text{falls } a \leq x < b \\ 0, & \text{falls } x \geq b \end{cases} .$$

Für $0 \leq a < b < 1$ gilt:

$$\begin{aligned} P(\{\omega \colon X(\omega) \in [a, b]\}) &= P(a \leq X \leq b) \\ &= \int\limits_a^b f(x)\,dx = \tfrac{1}{b-a} \int_a^b dx = 1 \end{aligned}$$

Bsp. 35 *Die Zufallsvariable X habe die Verteilungsfunktion*

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x}, & \textit{falls } x \geq 0 \\ 0, & \textit{falls } x < 0 \end{cases} .$$

Bez. 4 *Die Zufallsvariable X heißt exponentialverteilt, bez.* $X \sim Exp(\lambda)$.

Die Dichtefunktion ist

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, & \textit{falls } x \geq 0 \\ 0, & \textit{falls } x < 0 \end{cases} .$$

Weiterhin gilt:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Bsp. 36 *Sei die Zufallsvariable*

$$X: \quad (\Omega, \mathcal{E}, P) \to (\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1, P_X)$$

der Meßfehler bei Messung einer physikalischen Konstanten.

Der W.raum $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ *ist ein Modell eines im Hintergrund wirkenden Zufallsmechanismus, der nicht näher beschrieben werden kann,*
Fehler im Meßinstrument
zufällige äußere Einflüsse.

Er enthält alle nicht näher bestimmbaren zufälligen Effekte.

Zur Beschreibung dient der Bildraum
$(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1, P_X)$.

Oft kann man annehmen,

$$P_X(B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_B e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dt.$$

Die Zufallsvariable X mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dt.$$

heißt normalverteilt mit den Parametern (μ, σ^2), *bez.* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. *Die zugehörige Dichtefunktion hat die Form:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \sigma > 0.$$

Ist $f(x)$ *wirklich eine Dichtefunktion?*
Offensichtlich ist $f(x) \geq 0$ *für alle Zahlen* $x \in \mathbb{R}$ *und* $\sigma > 0$. *Es bleibt zu untersuchen, ob gilt:*

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1.$$

Wir bezeichnen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx =: I.$$

Wir betrachten zunächst:

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \, dx \right)^2 \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \, dx \right) \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} \, dy \right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \, dx \right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} \, dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} \, dx \, dy
\end{aligned}
$$

Wir führen nun eine Substitution durch:

$$s := \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad t := \frac{y-\mu}{\sigma}.$$

Dann gilt:

$$x = s\sigma + \mu \qquad y = t\sigma + \mu,$$

$$dx = \sigma\, ds \qquad dy = \sigma\, dt.$$

Wir erhalten damit:

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma^2 \, ds \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(s^2+t^2)} \, ds \, dt
\end{aligned}
$$

Wir führen eine weitere Substitution durch, Polarkoordinaten:

$$
s = r\cos\varphi \qquad t = r\sin\varphi.
$$

Dann gilt allgemein nach der Substitutionsregel:

$$\int \int g(s,t)\,ds\,dt = \int \int g(r,\varphi)\,\det J\,dr\,d\varphi,$$

$$
\begin{aligned}
\det J = |J| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial r} & \frac{\partial s}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial t}{\partial r} & \frac{\partial t}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} \\
&= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi \\
&= r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)} r\,dr\,d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} r\,dr\,d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty} d\varphi \qquad \text{(durch Differentiation leicht nachvollziehbar!)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2\pi}2\pi = 1
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ $I = 1$, d.h. f ist eine Dichtefunktion.

Zusammenfassung (Zufallsvariable).

Eine (meßbare) Abbildung

$$X: \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt Zufallsvariable.

Jedem Element ω des Stichprobenraumes Ω wird eine reelle Zahl zugeordnet.

Def.: Die Zufallsvariable X heißt diskret, wenn X nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele Werte x_i annehmen kann. Jeder dieser Werte kann mit einer gewissen Wkt. $p_i = P(X = x_i)$ auftreten.

Bsp.: - geografische Lage (N,O,S,W)

- Länge einer Warteschlange

- Anzahl der erreichten Punkte in der Klausur.

Def.: Die Zufallsvariable X heißt stetig, falls X beliebige Werte in einem Intervall (a,b), $[a,b]$, $(a,b]$, $(a,b]$, $(-\infty,a)$, (b,∞), $(-\infty,a]$, $[b,\infty)$, $(-\infty,\infty)$ annehmen kann.

Bem.: Jeder einzelne Wert $x_i \in (a,b)$ (oder in einem der anderen Intervalle) hat die Wkt. Null.

Die Verteilungsfunktion F wird dann durch die sogen. Dichtefunktion f beschrieben,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

6 Allgemeine Eigenschaften einer Verteilungsfunktion

Satz 8 *Es sei X eine zufällige Variable mit der Verteilungsfunktion*

$$F(x) = P(X < x) = P(\{\omega\colon X(\omega) < x\}) = P_X(]-\infty, x[).$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. *Die Funktion $F(x)$ ist monoton wachsend.*
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
3. *Die Funktion $F(x)$ ist linksseitig stetig. Es gilt also:*

$$\lim_{x \to x_0 -} F(x) = F(x_0).$$

4. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Beweis:

1. Es sei $x_1 < x_2 < x$. Wir definieren zwei Mengen:

$$A := \{\omega \colon X(\omega) < x_1\},$$

$$B := \{\omega \colon X(\omega) < x_2\}.$$

Dann gilt:

$$F(x_1) = P(\{\omega \colon X(\omega) < x_1\}) = P(A),$$

$$F(x_2) = P(\{\omega \colon X(\omega) < x_2\}) = P(B).$$

Wegen $A \subseteq B$ folgt: $P(A) \leq P(B)$, d.h.

$$F(x_1) \leq F(x_2),$$

d.h. die Funktion $F(x)$ monoton wachsend.

2. Sei (x_n) eine monoton fallende Folge mit $x_n \to -\infty$.
   Sei (y_n) eine monoton wachsende Folge mit $y_n \to \infty$.
   Wir definieren:

$$A_n := \{\omega\colon X(\omega) < x_n\},$$

$$B_n := \{\omega\colon X(\omega) < y_n\}.$$

   Für die Folgen (A_n) und $B_n)$ gilt:
   (A_n) ist monoton fallend ($A_n \supseteq A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$),
   (B_n) monoton wachsend ($B_n \subseteq B_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$).

Offensichtlich gilt:

$$F(x_n) = P(A_n), \qquad F(y_n) = P(B_n).$$

Wegen der Stetigkeit der Wkt. von oben und unten ist

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(X < -\infty) = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(\lim_{n\to\infty} B_n) = P(X < +\infty) = 1.$$

Das bedeutet jedoch nichts anderes als:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(y_n) = 1.$$

(Das können wir schlußfolgern, da Grenzwerte von

Funktionen von der Wahl der Folgen unabhängig sind.)

3. Wir definieren eine Menge

$$A = \{\omega\colon X(\omega) < x_0\}$$

und eine Folge von Mengen

$$A_n = \{\omega\colon X(\omega) < x_n\},$$

wobei (x_n) eine monotone Folge ist, die von links gegen x_0 konvergiert ($x_n \longrightarrow x_0 - 0$). Offenbar ist die Folge (A_n) monoton wachsend ($A_n \subseteq A_{n+1}$). Außerdem gilt:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

Dann können wir schlußfolgern:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F(x_n) &= \lim_{n\to\infty} P(X < x_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n) \\
&= P(\lim_{n\to\infty} A_n) \\
&= P(A) = P(X < x_0) \\
&= F(x_0)
\end{aligned}
$$

Das bedeutet aber:

$$\lim_{x\to x_0-} F(x) = F(x_0).$$

4. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
P(a \le X < b) &= P(\{X < b\} \setminus \{X < a\}) \\
&= P(X < b) - P(X < a) \quad \text{(Subtraktivität (vgl. Folg} \\
&= F(b) - F(a)
\end{aligned}
$$

$\square$