16.3 Rekurrente und transiente Zustände

Für alle $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit

$$f_i(n) = P(X_n = i, X_{n-1} \neq i, \ldots, X_1 \neq i, X_0 = i)$$

die Wahrscheinlichkeit, daß nach n Schritten erstmalig wieder der Zustand i erreicht wird. Es gilt:

$$f_i(0) = 0 \text{ und } f_i(1) = p_{ii}.$$

Sei i fest und seien $\quad \forall k = 1, \ldots, n$

$$B_k = \{X_k = i, X_\nu \neq i \quad \forall \nu = 1, \ldots, k-1 | X_0 = i\}$$

$B_{n+1} = \{$System befand sich während der ersten n Schritte nie im Zustand $i\}$.

Offenbar

$$\bigcup_{l=1}^{n+1} B_l = \Omega, \qquad B_l \cap B_{l'} = \emptyset \quad (l \neq l').$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
p_{ii}(n) &= P(X_n = i | X_0 = i) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} P(X_n = i | B_k) \cdot P(B_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_i(k) p_{ii}(n-k) + P(X_n = i | B_{n+1}) \cdot P(B_{n+1})
\end{aligned}$$

Wegen $P(X_n = i|B_{n+1}) = 0$ folgt

$$p_{ii}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_i(k) \cdot p_{ii}(n-k) \qquad (n \geq 1).$$

Damit läßt sich $f_i(k)$ rekursiv berechnen:

$$\begin{aligned}
f_i(0) &= 0, \qquad f_i(1) = p_{ii} \\
p_{ii}(2) &= f_i(1) \cdot p_{ii}(1) + f_i(2) \cdot p_{ii}(0) \\
&= p_{ii}^2 + f_i(2) \\
f_i(2) &= p_{ii}(2) - p_{ii}^2 \\
\big(p_{ii}(2) &= \sum_k p_{ik} p_{ki} \geq p_{ii}^2\big).
\end{aligned}$$

Wirbezeichnen mit

$$F_i := \sum_{j=1}^{\infty} f_i(j)$$

die Wkt., daß man irgendwann in den Zustand i zurückkehrt.

Def. 63 *Ein Zustand $i \in S$ heißt <u>rekurrent</u>, wenn $F_i = 1$ gilt. Ist dagegen $F_i < 1$, so heißt er <u>transient</u>.*

Bemerkung: Wir werden in der Vorlesung einige der folgenden Beweise weglassen.

Satz 68 *Zustand i rekurrent $\Rightarrow$ er wird unendlich oft erreicht mit Wkt. 1.*

Zustand i transient $\Rightarrow$ er kann höchstens endlich oft erreicht werden.

Beweis: Sei $r_i(k)$ die Wkt., dass die MK mindestens k mal nach i zurückkehrt.

$$\begin{aligned}
r_i(k) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(k\text{-1 mal zurück} \mid \text{erstmals nach } n \text{ Schritten zurück}) \cdot \\
&\qquad P(\text{nach } n \text{ Schritten das erste Mal nach } i \text{ zurück}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f_i(n) r_i(k-1) \\
&= r_i(k-1) \sum_{n=1}^{\infty} f_i(n) \\
&= r_i(k-1) F_i \\
\Rightarrow r_i(k) &= F_i^k
\end{aligned}$$

Ist i rekurrent, also $F_i = 1$, dann ist $r_i(k) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Sei i transient, d.h. $F_i < 1$.

Sei Z_i die Anzahl der Besuche in i.

$$P(Z_i = k) = F_i^k(1 - F_i)$$

geometrische Verteilung mit Parameter $(1 - F_i)$.

$$\mathbf{E}Z_i = \frac{1}{1 - F_i} < \infty$$

Satz 69 *Ein Zustand i ist genau dann rekurrent, wenn gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty.$$

Er ist genau dann transient, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) < \infty$ *ist.*

Beweis: (für einen anderen Beweis siehe z.B. Mathar/Pfeifer, Satz 3.2.1).

Erinnerung:

$$p_{ii}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_i(k) \cdot p_{ii}(n-k) \qquad (n \geq 1)$$

Multiplizieren diese Gleichung mit z^n und summieren über n:

$$
\begin{aligned}
P_i(z) &:= \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) z^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \biggl(\sum_{k=1}^{n} f_i(k) \cdot p_{ii}(n-k) \biggr) \\
&= \quad z f_i(1) \cdot p_{ii}(1-1) \\
&\quad + z^2 \bigl(f_i(1) \cdot p_{ii}(2-1) + f_i(2) \cdot p_{ii}(2-2) \bigr) \\
&\quad + z^3 \bigl(f_i(1) \cdot p_{ii}(3-1) + f_i(2) \cdot p_{ii}(3-2) + f_i(3) \cdot p_{ii}(3-3) \bigr) \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + z^n \bigl(f_i(1) \cdot p_{ii}(n-1) + \ldots + f_i(n) \cdot p_{ii}(0) \bigr) \\
&\quad + \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & z f_i(1)\left(1+\sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} p_{ii}(\nu)\right) \\
& + z^2 f_i(2)\left(1+\sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} p_{ii}(\nu)\right) \\
& + \ldots \\
& + z^n f_i(n)\left(1+\sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} p_{ii}(\nu)\right) \\
& + \ldots \\
= \quad & \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} f_i(\nu) \cdot \big(1 + P_i(z)\big) \\
= \quad & F_i(z) \cdot \big(1 + P_i(z)\big)
\end{aligned}
$$

wobei

$$F_i(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} z^\nu f_i(\nu).$$

Die Fkt. $F_i(z)$ und $P_i(z)$ sind analytisch für $|z| < 1$.

$$F_i(z) = \frac{P_i(z)}{1 + P_i(z)}, \quad P_i(z) = \frac{F_i(z)}{1 - F_i(z)}$$

$$\lim_{z \to 1} F_i(z) = F_i(1) = F_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_i(\nu)$$

ist die Wkt. für eine Rückkehr nach i. Sei

$$\lim_{z \to 1} P_i(z) = P_i = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$$

Daraus folgt

$$F_i = \lim_{z \to 1} \frac{P_i(z)}{1 + P_i(z)} = 1,$$

d.h. i ist rekurrent.

Sei umgekehrt $F_i = 1$. Dann folgt

$$P_i = \lim_{z \to 1} P_i(z) = \frac{1}{1 - \lim_{z \to 1} F_i(z)} = \infty.$$

Der zweite Teil des Satzes ist die Kontraposition des ersten Teils. $\square$

Folg. 11 *Sei i transient. dann*

$$F_i = \frac{P_i}{1 + P_i} < 1.$$

Diese beiden Aussagen können zum Beweis des folgenden Lemmas verwendet werden.

Lemma 70 *Ist ein Zustand i rekurrent (transient) und kommuniziert er mit einem Zustand j ($i \longleftrightarrow j$), so ist auch der Zustand j rekurrent (transient).*

Beweis: 1. Sei $i \longleftrightarrow j$. Dann existieren $m, k > 0$: $p_{ij}(k) > 0$ und $p_{ji}(m) > 0$. Für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} p_{jj}(m+n+k) &= \sum_l \Big(\sum_{k'} p_{jk'}(m) p_{k'l}(n)\Big) p_{lj}(k) \\ &= \sum_l p_{jl}(m+n) p_{lj}(k) \\ &\geq p_{ji}(m) p_{ii}(n) p_{ij}(k) \qquad (l = i). \end{aligned}$$

Daraus folgt (da i rekurrent)

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(m+n+k) \geq p_{ji}(m)p_{ij}(k) \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty.$$

2. Sei $i \longleftrightarrow j$. und i transient. Ang, j wäre rekurrent, dann wäre nach 1. auch i rekurrent. Wid.

$\square$

Folg. 12 *Eine irreduzible* MARKOFF*'sche Kette mit endlich vielen Zuständen hat nur rekurrente Zustände.*

Beweis: Mindestens ein Zustand muß rekurrent sein. Da alle Zustände miteinander kommunizieren, sind alle Zustände rekurrent. $\square$

Bsp. 117 (Random walk, eindim. Fall) *Der Zustandsraum ist $S = \mathbb{Z}$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind*

$$\begin{aligned} p_{i,i+1} &:= p \\ p_{i,i-1} &:= 1-p \\ p_{ij} &:= 0, \qquad \textit{falls } |i-j| \neq 1. \end{aligned}$$

D.h. Übergänge zwischen Zuständen, die einen Abstand ungleich Eins zueinander haben, sind nicht möglich. Die

Übergangsmatrix $\mathbf{M}$ hat folgende Gestalt:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1-p & 0 & p & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1-p & 0 & p & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1-p & 0 & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Offenbar kommunizieren alle Zustände miteinander. Ist somit ein Zustand rekurrent, so sind es alle. Und umgekehrt.

Es genügt also zu untersuchen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n).$$

Dazu siehe den Abschnitt Irrfahrten!

$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n) = \infty$, wenn $p = \frac{1}{2}$.

Bsp. 118 (Random walk, zwei- und dreidim. Fall) *Im zweidimensionalen Fall haben wir in jedem Zustand vier mögliche Übergänge, denen die Wahrscheinlichkeiten* p_1, p_2, p_3 *und* p_4 *zugeordnet werden. DieZustände sind rekurrent, wenn* $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$ *gilt.*

Im dreidimensionalen Fall sind in jedem Punkt im dreidimensionalen ganzzahligen Gitter sechs Übergänge möglich. Auch wenn $p_1 = \ldots = p_6 = \frac{1}{6}$*, so sind alle Zustände transient.*

Dazu siehe den Abschnitt Irrfahrten!

(die folgenden drei Seiten können überlesen werden.)

Sei jetzt der Zustand i Startzustand (fest) und

$Y_1 = \#$ Schritte bis zur ersten Rückkehr nach i

$Y_2 = \#$ Schritte bis zur zweiten Rückkehr

$Y_k = \#$ Schritte bis zur k-ten Rückkehr

$$P(Y_1 < \infty) = F_i$$

$$Y_1 = \infty \Longrightarrow Y_2 = \infty, \text{d.h.} \quad \{Y_1 = \infty\} \subseteq \{Y_2 = \infty\}$$

$$\Longrightarrow P(Y_2 < \infty | Y_1 < \infty) = F_i$$

$$
\begin{aligned}
P(Y_2 < \infty) &= P(Y_2 < \infty | Y_1 < \infty) \cdot P(Y_1 < \infty) \\
&= F_i^2 \\
P(Y_k < \infty) &= F_i^k
\end{aligned}
$$

Sei jetzt $F_i < 1. \Longrightarrow$

$$
\sum_{k=1}^{\infty} P(Y_k < \infty) = \sum_{k=1}^{\infty} F_i^k < \infty
$$

Folg. 13 *i transient $\Longrightarrow$ nach unendlich vielen Schritten tritt i höchstens endlich oft mit Wkt. 1 ein.*

Beweis: Nach dem Lemma von Borel-Cantelli gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty \Longrightarrow P(\limsup A_n) = 0.$$

Mit $A_k = \{Y_k < \infty\}$, $\quad B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k \downarrow$ folgt

$$0 = P(\limsup A_n) = P(\lim B_n) = \lim P(B_n) = P(B)$$

$$\begin{aligned} B &= \{\text{unendlich viele der } A_k, k = 1, 2, \ldots, \text{treten ein}\} \\ \overline{B} &= \{\text{endlich viele der} A_k, k = 1, 2, \ldots, \text{treten ein}\} \end{aligned}$$

$$P(\overline{B}) = 1$$

$\square$

Folg. 14 *Sei jetzt i rekurrent, d.h. $F_i = 1$. $\Longrightarrow$ i wird unendlich oft erreicht.*

Beweis: Für beliebiges k gilt: $P(Y_k < \infty) = 1$.

$Y = \#$ der Rückkehren nach i bei unendlich vielen Schritten.

$$\{Y_k < \infty\} \Leftrightarrow \{Y \geq k\}$$

$$P(Y = \infty) = \lim_{k \to \infty} P(Y \geq k) = \lim_{k \to \infty} P(Y_k < \infty) = 1.$$

$\square$

16.4 Grenzverteilungen

Def. 64 *Ein Zustand i heißt periodisch mit der Periode d, falls d größter gemeinsamer Teiler aller der Zahlen $n \in \mathbb{Z}^+$ ist, für die $p_{ii}(n) > 0$ gilt. Ist $d = 1$, so heißt der Zustand i aperiodisch. Falls für alle Zahlen $n \in \mathbb{Z}^+$ $p_{ii}(n) = 0$ gilt, so setzen wir $d := \infty$.*

Satz 71 *Es sei $i \in S$ ein periodischer Zustand mit Periode d. Desweiteren kommuniziere er mit einem weiteren Zustand j ($i \longleftrightarrow j$). Dann hat auch der Zustand j die Periode d.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist i periodischer Zustand mit Periode d. Folglich lassen sich alle Zahlen k mit $p_{ii}(k) > 0$

durch $k = k_0 \cdot d$, für eine Zahl k_0, darstellen. Da die Zustände i und j miteinander kommunizieren, existieren weitere Zahlen n und m, so daß gilt:

$$p_{ij}(n) > 0 \text{ und } p_{ji}(m) > 0.$$

Daraus folgt mit Hilfe der Rekursion von CHAPMAN–KOLMOGOROFF:

$$\begin{aligned} p_{ii}(n+m) &= \sum_{l \in S} p_{il}(n) \cdot p_{li}(m) \\ &\geq p_{ij}(n) \cdot p_{ji}(m) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Folglich ist d Teiler der Summe $n + m$.

Es gelte nun $p_{jj}(r) > 0$ für ein gewisses r. Dann gilt:

$$\begin{aligned} p_{ii}(n+m+r) &= \sum_{l,s \in S} p_{il}(n) \cdot p_{ls}(r) \cdot p_{si}(m) \\ &\geq p_{ij}(n) \cdot p_{jj}(r) \cdot p_{ji}(m) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Wir stellen also fest:

$$\left.\begin{array}{r} d \text{ teilt } m+n+r \\ d \text{ teilt } m+n \end{array}\right\} d \text{ teilt } r.$$

Folglich ist der Zustand j periodisch mit Periode d', wobei gilt: $d' \leq d$.

Da die Relation „$\longleftrightarrow$“ symmetrisch ist, gilt auch: $j \longleftrightarrow i$.

Mit der gleichen Beweisführung wie oben können wir dann zeigen, daß gilt: $d \leq d'$. Daraus folgt: Die Zustände i und j haben die gleiche Periodenlänge. $\square$

Es sei nun i ein Zustand aus dem Zustandsraum S. Wir betrachten die folgende Zufallsgröße:

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n & \ldots \\ f_i(1) & f_i(2) & \ldots & f_i(n) & \ldots \end{pmatrix}.$$

Wir definieren die mittlere Rückkehrzeit in den Zustand i:

$$\mu_i := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_i(n) = \mathbf{E}Y.$$

Def. 65 *Es sei i ein Zustand aus dem Zustandsraum S. Der Zustand i heißt positiv rekurrent, falls $\mu_i < \infty$ gilt. Ist dagegen $\mu_i = \infty$, so nennen wir den Zustand i Null–rekurrent.*

Es gelten für einen beliebigen Zustand i die folgenden Zusammenhänge (ohne Beweis):

- $\mu_i < \infty$ genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n) > 0$;
- $\mu_i = \infty$ genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n) = 0$.
- Ist der Zustand i positiv rekurrent und aperiodisch, so gilt:
$$\mu_i = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n)}.$$

Def. 66 *Eine* MARKOFF*'sche Kette* $\{X_t\}_{t \in T}$ *heißt* *ergodisch*, *falls der Zustandsraum* S *nur aus positiv–rekurrenten und aperiodischen Zuständen besteht.*

Satz 72 (Ergodensatz) *Eine homogene* MARKOFF*'sche Kette* $\{X_t\}_{t \in T}$ *ist genau dann irreduzibel und ergodisch, wenn für alle Zustände* $i \in S$ *gilt:*

$$p_j := \lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) > 0.$$

Außerdem gilt $\mu_j = \frac{1}{p_j}$ *und* $\{p_j\}$ *ist eindeutig bestimmt durch:*

$$p_j = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot p_{ij}.$$

$\{p_i\}$ heißt <u>stationäre</u> oder <u>Finalverteilung</u>. Die stationäre Verteilung kann also nach obiger Gleichung ermittelt werden.

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{M}^T \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_j \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Also gilt: $\mathrm{M}^T \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p} = \lambda \cdot \mathbf{p}$ mit $\lambda = 1$. Eigenwertgleichung für den Eigenwert 1. $\mathbf{p}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Bem. 28 M *und* M^T *haben dieselben Eigenwerte.*

Folg. 15 *Sei* M *die Übergangsmatrix einer* MARKOFF*'schen Kette mit endlich vielen Zuständen (in der Form, in der die Äquivalenzklassen ablesbar sind) Dann gilt: Die Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist gleich der Anzahl der rekurrenten Äquivalenzklassen.*

Beweis: Jede Teilübergangsmatrix von Äquivalenzklassen hat den einfachen Eigenwert 1 (Finalverteilung eindeutig!) □

Bsp. 119 *Wir betrachten eine* MARKOFF*'sche Kette über einem dreielementigen Zustandsraum, die die folgende*

Übergangsmatrix M besitzt:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Äquivalenzklassen: $\{1,2\},\{3\}$. *Wir ermitteln die Eigenwerte:*

$$\begin{aligned} 0 &= \det(M - \lambda \cdot I) \\ &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \cdot \left[\left(\tfrac{1}{2} - \lambda\right) \cdot \left(\tfrac{1}{4} - \lambda\right) - \tfrac{3}{8}\right] \end{aligned}$$

Der erste Eigenwert: $\lambda_1 = 1$. Weiter:

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\tfrac{1}{2} - \lambda\right) \cdot \left(\tfrac{1}{4} - \lambda\right) - \tfrac{3}{8} \\
&= \frac{1}{8} - \frac{3}{4}\lambda + \lambda^2 - \frac{3}{8} \\
&= \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4} \\
\lambda_{2,3} &= \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{16}{64}} \\
&= \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64}} \\
\lambda_2 &= \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1 \\
\lambda_3 &= -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Also: Eigenwerte: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -\frac{1}{4}$. Der Eigenwert 1 hat folglich die Häufigkeit 2, und somit gibt es zwei rekurrente Äquivalenzklassen.

Folg. 16 *Falls*

$$\sum_i p_{ij} = \sum_j p_{ij} = 1$$

so sind die stationären Verteilungen einer endlichen irreduziblen Markoffschen Kette Gleichverteilungen.

Beweis: Es gilt für die stationäre Verteilung $(p_1, \ldots, p_n)$:

$$\sum_i p_i p_{ij} \;=\; p_j = p_j \sum_i p_{ij}$$

Daraus folgt $\quad \forall j$

$$\begin{aligned} \sum_i (p_i - p_j) p_{ij} &= 0, \quad \text{insbesondere} \\ \sum_i (p_i - p_{j_0}) p_{ij_0} &= 0, \quad j_0 = \min_j p_j \end{aligned}$$

Wegen $(p_i - p_{j_0}) \geq 0$ folgt $p_{j_0} = p_i \quad \forall i$, d.h. $p_i = \frac{1}{n}$. $\square$

Folg. 17 *Ist die Übergangsmatrix einer endlichen irreduziblen Markoffschen Kette symmetrisch so sind die stationären Verteilungen Gleichverteilungen.*

Veranschaulichung von $\lim p_{jj}(n) = \frac{1}{\mu_j}$ und des Ergodensatzes

$\{X_t\}$: homogene Markoffsche Kette

j: rekurrenter Zustand, $X_0 = j$ (j fest).

$$Y_k = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad X_k = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$P(Y_k = 1) = p_{jj}(k), \quad \mathbf{E}Y_k = p_{jj}(k)$$

Anzahl der Wiederkehrzeitpunkte im Zeitraum $1, \ldots, N$

$$\sum_{k=1}^{N} Y_k = k_N.$$

Beobachtete mittlere Anzahl der Wiederkehrpunkte pro Schritt (im Zeitraum $1, \ldots, N$)

$$\begin{aligned}
\frac{k_N}{N} &\sim \mathbf{E}\frac{k_N}{N} = \frac{1}{N}\mathbf{E}\Big(\sum_{n=1}^{N} Y_k\Big) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{E}Y_k \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p_{jj}(n)
\end{aligned}$$

Mittlere beobachtete Wiederkehrzeit im Zeitraum $1, \ldots, N$

$$\frac{N}{k_N} \to \mu_j$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} p_{jj}(n) \to_{N\to\infty} \frac{1}{\mu_j}$$

Andererseits:

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}(n) = p_j \Longrightarrow \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} p_{jj}(n) \to_{N\to\infty} p_j = \frac{1}{\mu_j}.$$

Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit

$$c(n_0) := 1 - \frac{1}{2} \sup_{i,j} \sum_m |p_{im}(n_0) - p_{jm}(n_0)|$$

Für $n \geq n_0$ gilt:

$$c(n) > 0.$$

Satz 73 *Sei $c(n_0) > 0$ für ein gewisses n_0. dann existiert*

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = p_j, \quad j = 1, 2, \ldots$$

und es gilt für alle Anfangsverteilungen $\{p_j^0\}$:

$$|p_j(n) - p_j| \leq C \cdot e^{-Dn},$$

wobei

$$C = \frac{1}{1 - c(n_0)}, \quad D = \frac{1}{n_0} \ln \frac{1}{1 - c(n_o)}$$

Beweis: Rosanov, Zufällige Prozesse $\square$

$$p_j(n) = P(X_n = j) = \sum_i p_i^0 p_{ij}(n)$$