16 Markoff'sche Ketten

Beispiele

Irrfahrten (auf der Geraden, der Ebene, im Raum)

Ruin des Spielers

Markov Chain Monte Carlo (z.B. Simulated Annealing)

Fragestellungen

Rückkehrwktn., Absorptionswktn.

Erste Rückkehr

Stationäre Verteilungen

16.1 Definitionen und einfache Zusammenhänge

$\{X_t\}_{t\in T}$: Famile von Zufallsgrößen.

T: total geordnete Menge (mit kleinstem Element t_0).

T endlich, o.B.d.A. $T = \{0, 1, 2, \ldots, k\}$ oder

T abzählber, o.B.d.A. $T \in \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$

Wir betrachten ein System, das aus einem Anfangszustand für $t = t_0$ schrittweise übergeht in Zustände für $t = t_1, t = t_2, \ldots$.

Menge der Zustände: Zustandsraum S,

$S = \{1, 2, \ldots, m\}$ oder $S = \mathbb{N}$ oder $S = \mathbb{Z}$.

Für jedes t wird der (aktuelle) Zustand durch eine Zufallsvariable X_t beschrieben,

$$P(X_t \in S) = 1, \qquad F_t(x) := P(X_t < x)$$

Def. 55 *Es sei T, $T \subseteq \mathbb{Z}^+$, eine abzählbare Menge und S, $S \subseteq \mathbb{Z}$ (Zustandsraum) eine höchstens abzählbare Menge. Die Elemente von S nennen wir Zustände. Es sei nun $\{X_t\}_{t\in T}$ eine Familie von zufälligen Größen, für die gelte:*

$$P(X_t \in S) = 1, \quad \forall t \in T.$$

Diese Familie von Zufallsgrößen heißt MARKOFF*'sche Kette, falls gilt:*

$$P(X_{t+1} = j \,|\, X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{t+1} = j \,|\, X_t = i) =: p_{ij}^{(t)}.$$

Die Anfangsverteilung der MARKOFF*'schen Kette bezeichnen wir mit $p_i^{(0)} = P(X_0 = i)$.*

Bem.: Wir stellen uns also vor, daß wir, beginnend im Zustand i_0, über die Zustände $i_1, \ldots, i_{t-1}$ in den Zustand i gelangt sind und nun in einen weiteren Zustand übergehen wollen. Eine Familie von Zufallsgrößen ist eine MARKOFF'sche Kette, wenn für den Übergang in diesen Zustand nur der unmittelbar vorangegangene Zustand, also der Zustand i, relevant ist. (Markoff-Eigenschaft)

Def. 56 *Eine* MARKOFF*'sche Kette heißt* *<u>homogen</u>*, *wenn für alle $i, j \in S$ und für alle $t \in T$ gilt, daß $p_{ij}^{(t)} = p_{ij}$, d.h. wenn die Übergangswahrscheinlichkeiten unabhängig vom jeweiligen Schritt t sind.*

p_{ij} heißt Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand i in den Zustand j.

Def. 57 *Die Matrix* $\mathbf{M} = (p_{ij})_{i,j \in S}$*,*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

heißt Übergangsmatrix der MARKOFF*'schen Kette, falls folgendes gilt:*

$$p_{ij} \geq 0, \qquad \forall i, j \in S \textit{ und } \sum_{j \in S} p_{ij} = 1 \quad \forall i \in S,$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit, in irgendeinen nächsten Zustand j *zu gelangen, ist Eins.*

Wir werden in diesem Kapitel ausschließlich homogene MARKOFF’sche Ketten betrachten.

Es sei nun $\{X_t\}_{t\in T}$ eine solche homogene MARKOFF’sche Kette. Wir definieren:

$$p_{ij}(n) := P(X_{m+n} = j | X_m = i).$$

Das ist die Wahrscheinlichkeit, daß man nach n Schritten aus dem Zustand i in den Zustand j gelangt. Da die Kette homogen ist, gilt:

$$p_{ij}(n) = P(X_n | X_0 = i).$$

Wie kann nun die Matrix für die Wahrscheinlichkeiten $p_{ij}(n)$ aus der „Ein–Schritt–Übergangsmatrix“ berechnet werden?

Annahme: Anfangszustand und Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} bekannt.

Es gilt:

$$\begin{aligned} p_{ij}(0) &= \begin{cases} 1 & \text{, falls } i = j; \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases} \\ p_{ij}(1) &= p_{ij}. \end{aligned}$$

Untersuchen wir die Wahrscheinlichkeit $p_{ij}(2)$:

$$\begin{aligned} p_{ij}(2) &= P(X_2 = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X_2 = j, X_1 = k | X_0 = i) \end{aligned}$$

Wir wenden nun die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit (vgl. Seite 108) an, und zwar mit

- $A_i := \{X_1 = i\}$, für alle $i \in S$, denn: $\bigcup\limits_{i\in S} A_i = \Omega$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$, für alle $i, j \in S$ mit $i \neq j$;
- $A := \{X_2 = j\}$.

Dann erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(2) &= \sum_{k\in S} P(X_2 = j|\, X_1 = k, X_0 = i) \cdot P(X_1 = k|\, X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in S} P(X_2 = j|\, X_1 = k) \cdot P(X_1 = k|\, X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in S} p_{kj} \cdot p_{ik} = (\mathbf{M}^2)_{ij}
\end{aligned}
$$

Allgemein gilt die Rekursion von Chapman–Kolmogorov

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_n &= \mathbf{M}^n \\
p_{ij}(n) &= \sum_{k\in S} p_{ik}(n-m)\cdot p_{kj}(m) \\
&= \sum_{k\in S} p_{ik}(n-1)\cdot p_{kj}, \quad (m=1).
\end{aligned}
$$

Folg. 9

$$
P(X_n = j) = \sum_k p_{kj}(n)\cdot p_k^0.
$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \sum_k P(X_n = j, X_0 = k) \\ &= \sum_k P(X_n = j | X_0 = k) \cdot P(X_0 = k) \\ &= \sum_k p_{kj}(n) \cdot p_k^0. \end{aligned}$$

$\square$

$p_j = P(X_n = j), \quad \mathbf{p}^T = (p_1, p_2, \ldots)$

$$\mathbf{p} = \mathbf{M}^{n^T} \cdot \mathbf{p}^0, \qquad \mathbf{p}^T = \mathbf{p}^{0^T} \cdot \mathbf{M}^n$$

Bsp. 113 (Ein-Prozessorsystem)
mit einer I/O–Einheit, *vgl. Bsp. 25*

$S = \{1, 2\}$

1*: Programmstatus, in dem sich das System befindet, wenn es ein Programm abarbeitet (Prozessor aktiv)*

2*: I/O–Status, der dann angenommen wird, wenn die I/O–Einheit aktiviert wird.*

Für jeden Schritt n*, den das System macht, definieren wir eine Zufallsgröße* X_n*, die die Elemente der Menge* S *als Werte annehmen kann, je nachdem, in welchem Zustand sich das System in diesem Schritt befindet. Dann haben wir für die Übergangswahrscheinlichkeiten:*

$$X_n = 1 \implies X_{n+1} = 1, \text{ mit Wahrscheinlichkeit } q = 1 - p$$
$$X_n = 1 \implies X_{n+1} = 2, \text{ mit Wahrscheinlichkeit } p$$
$$X_n = 2 \implies X_{n+1} = 1, \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 1$$
$$X_n = 2 \implies X_{n+1} = 2, \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 0$$

Übergangsmatrix:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Anfangsverteilung $p_i^{(0)} = P(X_0 = i)$ müssen wir festlegen. Sie ist, entsprechend der Arbeitsweise des Systems, wie folgt definiert:

- $p_1^{(0)} = 1$, d.h. die erste Aktion ist mit Wahrscheinlichkeit Eins die Ausführung eines Programms;
- $p_2^{(0)} = 0$, d.h. die erste Aktion ist mit Wahrscheinlichkeit Null die Aktivierung der I/O–Einheit.

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} (1-p)^2 + p & p(1-p) \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

16.2 Klassifikation der Zustände

Def. 58 *Ein Zustand j heißt vom Zustand i aus erreichbar, wenn es eine Zahl n gibt, so daß gilt: $p_{ij}(n) > 0$.*
Bez.: $i \longrightarrow j$.

Def. 59 *Zwei Zustände i und j kommunizieren, wenn gilt: $i \longrightarrow j$ und $j \longrightarrow i$. Wir schreiben dann: $i \longleftrightarrow j$.*

Die Relation „$\longleftrightarrow$“ ist eine Äquivalenzrelation:

1. Sie ist **reflexiv**. Es gilt: $i \longleftrightarrow i$ wegen $p_{ii}(0) = 1$.
2. Sie ist **symmetrisch**.

   $i \longleftrightarrow j$ gdw. $j \longleftrightarrow i$.

3. Sie ist **transitiv**.

   Es gelte $i \longleftrightarrow j$ und $j \longleftrightarrow k$. D.h. es existieren Zahlen $m, n \geq 0$, so daß gilt:

$$p_{ij}(m) > 0, \quad p_{jk}(n) > 0.$$

   Dann folgt aus der Chapman–Kolmogorov Rekursion

$$\begin{aligned} p_{ik}(m+n) &= \sum_{l \in S} p_{il}(m) \cdot p_{lk}(n) \\ &\geq p_{ij}(m) \cdot p_{jk}(n) > 0 \end{aligned}$$

   Nach $m+n$ Schritten erreicht man folglich vom Zustand i aus den Zustand k. Es gilt also: $i \longrightarrow k$. Mit Hilfe der Symmetrieeigenschaft der Relation „$\longleftrightarrow$“, angewendet auf die Voraussetzung, folgt $k \longrightarrow i$ gilt.

Folg. 10 *Es sei S der Zustandsraum einer* MARKOFF*'schen Kette. Es gibt eine Zerlegung von S in Äquivalenzklassen bzgl. der Relation „$\longleftrightarrow$“.*

Die kommunizierenden Zustände lassen sich weiter unterteilen.

Def. 60 *Gibt es für einen Zustand i einen Zustand j und eine Zahl $n \geq 0$, so daß*

$$p_{ij}(n) > 0, \text{ aber } p_{ji}(m) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

gilt, so heißt i unwesentlicher oder auch vorübergehender Zustand.
Andernfalls heißt i wesentlicher Zustand.

Bsp. 114 *Wir betrachten den Zustandsraum* $S = \{1,2,3,4\}$. *Eine* MARKOFF*'sche Kette auf diesem Zustandsraum habe die folgende Übergangsmatrix* M:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Zustände 1 *und* 2 *sind hier unwesentliche Zustände. Für den Zustand* 1 *existiert der Zustand* 3, *für den gilt, daß* $p_{13}(1) = \frac{1}{2} > 0$ *ist. Eine Zahl* m, *für die* $p_{31}(m) > 0$ *gilt, läßt sich jedoch nicht finden. Vergleichen wir die Zustände* 2 *und* 4, *kommen wir zu einem ähnlichen Ergebnis.*

Die Zustände 3 und 4 sind dagegen wesentlich.

An der Matrix $\mathbf{M}$ *läßt sich das in diesem Fall alles ablesen.*

Die Elemente des Zustandsraumes sind in diesem Beispiel bereits so sortiert, daß die unwesentlichen Zustände vorn stehen. Wir sehen, daß in der Matrix in den ersten beiden Spalten im unteren Bereich nur noch Nullen stehen. Man sollte sich folgendes klarmachen: Diese Nullen zeigen, daß man aus den durch die Zeilennummern der Nullen bezeichneten Zuständen nicht mehr in die Zustände, die durch die betreffenden Spaltennummern gekennzeichnet werden, zurückkehren kann.

Verallgemeinerung: Durch eine geeignete Numerierung der Zustände kann die Übergangsmatrix M einer MARKOFF'schen Kette wie in der

Abbildung (s. Tafel)

dargestellt werden.

Dabei sind die s_i die Zustandsklassen, in die der Zustandsraum S bzgl. der Äquivalenzrelation „$\longleftrightarrow$“ zerlegt werden kann. s_0 ist die Klasse der unwesentlichen Zustände, die s_i $(i \geq 1)$ sind die Klassen der wesentlichen Zustände. Die schraffierten Felder sind Teilmatrizen der Matrix M, die mit Übergangswahrscheinlichkeiten bestzt sind. Man sieht auch, daß Übergänge nur innerhalb einer Zustandsklasse möglich sind.

Def. 61 *Besteht eine Äquivalenzklasse s_i bzgl. „$\longleftrightarrow$“ nur aus einem einzigen Zustand ($s_i = \{j_i\}$), so heißt dieser Zustand absorbierender Zustand.*

Def. 62 *Eine* MARKOFF*'sche Kette heißt irreduzibel oder unzerlegbar, wenn der Zustandsraum S aus genau einer Klasse wesentlicher Zustände besteht.*

Bsp. 115 $S = \{1, 2\}$, *Übergangsmatrix:*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_n \quad \forall n \geq 1.$$

$\{X_t\}$ *ist reduzibel!* *Zustand 1 ist absorbierend!!*
$\{1\}$ *ist die einzige Äquivalenzklasse.*

Bsp. 116 $S = \{1, 2, 3\}$, *Übergangsmatrix:*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{19}{48} & \frac{11}{48} \\ \frac{1}{6} & \frac{11}{36} & \frac{19}{36} \end{pmatrix}$$

$p_{ij}(2) > 0 \quad \forall i, j \in S$.

$\{X_t\}$ *ist irreduzibel! Offensichtlich kommunizieren hier alle drei Zustände miteinander.*