Erzeugung einer solchen Zufallsgröße:

- Quantilmethode (siehe oben)
- Zentraler Grenzwertsatz
- Box-Müller Transformation

Quantilmethode

$U \sim R(0,1)$. $\quad X := \Phi^{-1}(u) \sim \mathcal{N}(0,1)$, denn

$$f_X(x) = h(\Phi(x)) \cdot \frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Problem: Berechnung von $\Phi^{-1}(u)$ ist aufwendig.

Ziel: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ erzeugen,

$$Y := \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(U) \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2).$$

Zentraler Grenzwertsatz (vgl. Satz 56, Seite 534).

$U_1, \ldots, U_n \sim R(0,1)$ unabhängig. Erwartungswert und Varianz sind

$$\begin{aligned} \mu &:= EU_i = \int_0^1 x\,dx = \tfrac{1}{2} \\ \sigma^2 &:= E\left(U_i - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{12} \end{aligned}$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n U_i - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} < x\right) = \Phi(x).$$

Einsetzen:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} U_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} < x \right) = \Phi(x).$$

Definieren wir also eine Zufallsgröße

$$X := \frac{\sum_{i=1}^{n} U_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}},$$

so ist diese für hinreichend großes n angenähert standardnormalverteilt.

Bsp. 111 *Es sei* $n = 12$. *Wir erhalten dann folgende Zufallsgröße* X*:*

$$X = \sum_{i=1}^{12} U_i - 6.$$

Diese Approximation ist in der Regel ausreichend. Man braucht jedoch 12 Pseudozufallszahlen, um eine standardnormalverteilte Zufallsgröße zu erhalten.

Der Aufwand bei dieser Methode ist also ziemlich hoch.

Satz 64 (BOX–MÜLLER**–Transformation)** *Seien* $U, V \sim R(0,1)$ *unabhängig. Dann sind die Zufallsgrößen*

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{-2 \cdot \ln U} \cdot \cos(2\pi V) \\ Y &= \sqrt{-2 \cdot \ln U} \cdot \sin(2\pi V) \end{aligned}$$

unabhängig und standardnormalverteilt, $X, Y \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Beweis: vgl. Beispiel 72, Seite 430. $\square$

Erzeugung exponentialverteilter Zufallsvariablen

Es sei $U \sim R(0,1)$ eine Pseudozufallszahl. Erzeugt werden soll eine Zufallsgröße $X \sim \mathrm{EX}(\lambda)$ mit der Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x} & \text{, falls } x \geq 0; \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Dazu wird folgende Transformation verwendet (vgl. Beispiel 62, Seite 377):

$$X := F^{-1}(U) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1-u) \geq 0.$$

Erzeugung einer binomialverteilten Zufallsvariable

Variante 1: Seien $X_i \sim Bi(1, p)$. Dann ist $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ binomialverteilt mit Parametern (n, p).

Variante 2: (Intervallmethode)
Zerlegen das Intervall $(0, 1)$ in disjunkte Teilintervalle der Länge

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

der Einzelwahrscheinlichkeiten, etwa

$$\begin{aligned}
(0,1) &= \bigcup_{i=0}^{n} I_i \\
&= (0,p_0] \cup \big(p_0, p_0+p_1\big] \cup \big(p_0+p_1, p_0+p_1+p_2\big] \cup \cdots \\
&\qquad \cup \Big(1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i, 1\Big)
\end{aligned}$$

Sei $U \sim R(0,1)$.

$$X = i \quad \text{falls} \quad U \in I_i.$$

Erzeugung einer POISSON–Verteilten Zufallsvariable

Es ist jetzt eine POISSON–verteilte Zufallsgröße X zu erzeugen, d.h.

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Variante 1: Intervallmethode

Variante 2: (Über die Exponentialverteilung)

Satz 65

Satz 65 *Es seien $Y_1, \ldots, Y_k$ unabhängige exponentialverteilte Zufallsgrößen und $Y^{(k)} := \sum_{i=1}^{k} Y_i$, Dann gilt für die Dichte der Zufallsvariable $Y^{(k)}$:*

$$f_{Y^{(k)}}(y) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot y^{k-1} \cdot e^{-\lambda \cdot y} & \text{, \textit{falls} } y \geq 0; \\ 0 & \text{, \textit{sonst.}} \end{cases}$$

Diese Funktion ist die Dichte der sogen. <u>ERLANG–Verteilung</u> mit Parametern (k, λ).

Beweis: Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion. Es sei $y \geq 0$.

IA: Da $Y^{(1)} = Y_1$ exponentialverteilt,

$$f_{Y^{(1)}}(y) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot y}.$$

IV: Es sei die Aussage für k gültig.

IS: Wir zeigen sie für $k+1$. Es gilt:

$$Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + Y_{k+1}.$$

Nun besitzt Y_{k+1} als exponentialverteilte Zufallsgröße dieselbe Dichtefunktion wie die zufällige Variable $Y^{(1)}$. Folglich können wir die Funktion $f_{Y^{(k+1)}}$ mittels Faltung der Dichtefunktionen $f_{Y^{(k)}}$ und $f_{Y^{(1)}}$ darstellen. Daher erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
f_{Y^{(k+1)}}(y) &= \int_0^\infty f_{Y^{(k)}}(x) \cdot f_{Y^{(1)}}(y-x)\,dx \\
&= \int_0^y \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (y-x)}\,dx \\
&= \int_0^y \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!} \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\lambda \cdot y}\,dx \\
&= \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda \cdot y} \cdot \int_0^y x^{k-1}\,dx \\
&= \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \cdot y^k \cdot e^{-\lambda \cdot y}
\end{aligned}
$$

$\square$

Satz 66 *Sind Y_i ($i \in \mathbb{N}$) unabhängige, exponentialverteilte Zufallsgrößen ($Y_i \sim \mathrm{EX}(\lambda)$, $i \in \mathbb{N}$), so ist die wie folgt definierte Zufallsvariable Y* POISSON*–verteilt mit Parameter λ:*

$$Y := \inf\left\{k\colon \sum_{i=1}^{k+1} Y_i > 1\right\} \sim \mathrm{PO}(\lambda).$$

Es gilt also:

$$P(Y = i) = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Beweis: Es gilt:

$$
\begin{aligned}
P(Y=k) &= P(\sum_{i=1}^{k} Y_i \leq 1, \sum_{i=1}^{k+1} Y_i > 1) \\
&= P(\sum_{i=1}^{k} Y_i \leq 1, Y_{k+1} > 1 - \sum_{i=1}^{k} Y_i) \\
&= \int_0^1 P(Y_{k+1} > 1 - T | T = t) f_T(t)\, dt \\
&= \int_0^1 P(Y_{k+1} > 1 - t) f_T(t)\, dt \\
&= \int_0^1 e^{-\lambda(1-t)} \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t}\, dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\lambda}\lambda^k \int_0^1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\, dt \\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},
\end{aligned}
$$

wobei $T = Y^{(k)} = \sum_{i=1}^k Y_i$ Erlang-verteilt ist. $\square$

Erzeugung einer geometrisch verteilten Zufallsvariable

Variante 1: Zur Erzeugung einer geometrisch verteilten Zufallsvariablen $X \sim Geo(p)$ seien $Y_i \sim Bi(1,p)$ Bernoulli verteilte Zufallsvariablen und

$$X = \min\{n : Y_n = 1\}$$

Variante 2: Sei $Y \sim Exp(\lambda)$, d.h. $F(y) = 1 - e^{-\lambda y}$. Die Zufallsvariable $\lfloor Y \rfloor$ ist geometrisch verteilt mit $p = 1 - e^{-\lambda}$.

Beweis: Es gilt:

$$
\begin{aligned}
P(\lfloor Y \rfloor = k) &= P(k \le Y < k+1) \\
&= F(k+1) - F(k) \\
&= (1 - e^{-\lambda(k+1)}) - (1 - e^{-\lambda k}) \\
&= e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda}) = (1-p)^k p
\end{aligned}
$$

$\square$

Kompositionsmethode

Sei F eine Linearkombination von mehreren Verteilungsfunktionen F_i,

$$F = \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i F_i, \qquad \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i = 1.$$

Algorithmus:

Erzeuge gleichverteilte Zufallszahl U,
falls $U \in [\sum_{j=1}^{i-1} \epsilon_j, \sum_{j=1}^{i} \epsilon_j\big)$ simuliere aus F_i.

Es folgen zwei Beispiele.

Kontaminierte Normalverteilung

$$F(x) = (1-\epsilon)\Phi\Big(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\Big) + \epsilon\Phi\Big(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\Big)$$

Doppelexponential (Laplace)

$X_1 \sim exp(\lambda)$

$$X = \begin{cases} X_1 & \text{falls} \quad U \leq \frac{1}{2} \\ -X_1 & \text{falls} \quad U > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Verwerfungsmethode (Acceptance Sampling)

F habe Dichte f, aber die Zufallszahlen seien schwierig direkt zu erzeugen.

Erzeugung von Zufallszahlen mit der Dichte g sei “leicht”.

$$M := \sup_x \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

Algorithmus:

1. Simuliere $U \sim R(0,1)$
2. Simuliere $Y \sim g$
3. Akzeptiere $X = Y$, falls $U \leq \frac{1}{M} \frac{f(Y)}{g(Y)}$

sonst gehe nach 1. (neuer Versuch)

$$
\begin{aligned}
P(Y\,\text{akzeptiert}) &= P\left(U \leq \frac{1}{M}\frac{f(Y)}{g(Y)}\right)\\
&= \int P\left(U \leq \frac{1}{M}\frac{f(Y)}{g(Y)} \big| Y = y\right) g(y)\,dy\\
&= \int \frac{1}{M}\frac{f(y)}{g(y)} \cdot g(y)\,dy = \frac{1}{M}.
\end{aligned}
$$

(Integration über den Definitionsbereich von Y)

Im Mittel müssen also M Zufallszahlen Y erzeugt werden.

Die Methode ist korrekt, denn:

$$\begin{aligned}
P(X \le x | Y \text{akzeptiert}) &= \int_{-\infty}^{x} P(Y = y | Y \text{akzeptiert}) g(y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{P(Y \text{akzeptiert}, Y = y)}{P(Y \text{akzeptiert})} g(y)\, dy \\
&= \int \frac{P\left(U \le \frac{1}{M} \frac{f(y)}{g(y)}\right)}{P(Y \text{akzeptiert})}\, g(y)\, dy \\
&= M \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{M} \frac{f(y)}{g(y)} g(y)\, dy \\
&= F(x).
\end{aligned}$$

Bsp. 112

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \textit{(Normal)} \\ g(x) &= \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad \textit{(Doppelexp)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup_x \frac{f(x)}{g(x)} &= \sup_x \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2+|x|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sup_x e^{(-x^2+2|x|-1+1)/2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{1/2} \sup_{x, x\geq 0} e^{-(x-1)^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{1/2} \approx 1.315. \end{aligned}$$

`Verwerfungsmethode.sas`

Erzeugung von zwei beliebig abhängigen Zufallsgrößen

Es seien X und Y zwei unabhängige, standardisierte Zufallsgrößen ($X, Y \sim (0,1)$). Wir definieren zwei weitere Zufallsgrößen X^* und Y^* wie folgt:

$$\begin{aligned} X^* &:= X \\ Y^* &:= \varrho \cdot X + \sqrt{1-\varrho^2} \cdot Y \qquad (\varrho \in [0,1]) \end{aligned}$$

Beh.: ϱ ist der gewünschte Korrelationskoeffizient zwischen X^* und Y^* (s. Abschnitt Korrelation).

Ist $\varrho = 1$, dann gilt $Y^* = X^* = X$, d.h. die beiden Zufallsgrößen sind identisch. Wird $\varrho = 0$ gewählt, so sind beide Zufallsvariablen unabhängig.

15.4.3 Weitere Simulationen

Das Buffonsche Nadelproblem (1777)

In der Ebene seien zwei parallele Geraden im Abstand a gezogen.

Auf die Ebene wird zufällig eine Nadel der Länge l, $\quad l \leq a)$ geworfen.

Frage: Wie groß ist die Wkt., daß die Nadel eine der Geraden schneidet?

Was heißt Nadel zufällig werfen?

X: Abstand des Nadelmittelpunkts von der nächstgelegenen Geraden, $0 \leq X \leq \frac{a}{2}$.

ϕ: Winkel zwischen Nadel und Geraden, $0 < \phi \leq \pi$.

Nadel zufällig werfen:

$$X \sim R(0, \frac{a}{2}), \qquad \phi \sim R(0, \pi).$$

Wann schneidet die Nadel eine Parallele? gdw.

$$X \leq \frac{l}{2} \sin \phi$$

gdw. der Punkt (ϕ, X) unterhalb des Sinusbogens liegt.

$$\begin{aligned} P &= \frac{\text{Fläche unterhalb des Sinusbogens}}{\text{Fläche des Rechtecks}[0,\pi]\text{x}[0,\frac{a}{2}]} \\ &= \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\phi\, d\phi}{\pi\cdot\frac{a}{2}} \\ &= \frac{2l}{\pi a} \end{aligned}$$

Insbesondere: $a = 2l$:

$$P = \frac{1}{\pi}.$$

Schätzung für π:

$$\hat{\pi} = \frac{\#\text{Würfe}}{\#\text{Treffer}}$$

Simulation einer Markoff'schen Kette

gegeben: Zustandsraum: $S = \{1, 2, \ldots\}$

Anfangsverteilung: $\{p_j^0\}_{j=1,2\ldots}$, $\quad (p_0^0 = 0)$

Übergangsmatrix:

$$\left(p_{ij}\right)_{\substack{i=1,2,\ldots \\ j=1,2,\ldots}}$$

1. Schritt: Erzeuge eine Pseudozufallszahl U_0. Falls

$$\sum_{k=0}^{i-1} p_k^0 \leq U_0 < \sum_{k=0}^{i} p_k^0$$

so starte im Zustand "i".

n-ter Schritt: Im $n-1$ten Schritt sei der Zustand "i" erreicht worden. Erzeuge eine Pseudozufallszahl U_n. Falls

$$\sum_{k=0}^{j-1} p_{ik} \leq U_n < \sum_{k=0}^{j} p_{ik}$$

so gehe in den Zustand "j".

*Simulation von auf der n-dimensionalen Kugeloberfläche gleichverteilten Zufallsvariablen

Satz 67 *Seien* $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$*, i.i.d.* $\quad i = 1, \ldots, n,$ $\quad$ *und*

$$Y_i = \frac{X_i}{R}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

wobei

$$R^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Dann gilt

$$Y_i \sim R(K_n^O(0,1)),$$

wobei $K_n^O(0,1)$ *die Oberläche der* n*-dimensionalen Einheitskugel ist.*

Beweis: Wir betrachten die Transformation

$$G : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \to K_{n-1}(0,1) \times \mathbb{R}^+$$

wobei $K_{n-1}(0,1)$ die $n-1$ dimensionale Einheitsvollkugel ist.

$$
\begin{aligned}
y_2 &= \frac{x_2}{r} \\
&\ldots \\
y_n &= \frac{x_n}{r} \\
r &= r
\end{aligned}
$$

Diese Abbildung ist injektiv und es gilt für G^{-1}:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= r \cdot y_2 \\
&\ldots \\
x_n &= r \cdot y_n \\
r &= r
\end{aligned}
$$

Die Jacobi-Matrix ist

$$J := \frac{\partial G^{-1}(y_2,\ldots,y_n,r)}{\partial(y_2,\ldots,y_n,r)} = \begin{pmatrix} r & 0 & \ldots 0 & y_2 \\ 0 & r & \ldots 0 & y_3 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots r & y_n \\ 0 & 0 & \ldots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also: $\det J = r^{n-1}$.

Die gemeinsame Dichte von $(\mathbf{Y}, R) = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, R)$ ist dann

$$f_{\mathbf{Y},R}(y_1,\ldots,y_n,r)$$

$$= \begin{cases} f_{\mathbf{X},R}(ry_1, G^{-1}(y_2,\ldots,y_n,r)) \cdot \det J, & y_1^2 = 1 - \sum_{j=2}^n y_j^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{j=1}^n e^{-\frac{r^2 y_j^2}{2}} \cdot r^{n-1}, & y_n^2 = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} y_j^2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r^{n-1} & \text{falls} \quad y_n^2 = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} y_j^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Zufallsvektoren $(Y_1, \ldots, Y_n)$ und R sind also unabhängig und wegen

$$\frac{e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r^{n-1}}{(2\pi)^{n/2}} = \frac{r^{n-1}e^{-\frac{r^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}$$
$$= f_{\chi_n}(r) \cdot \frac{1}{A_{K_n^O(0,1)}}$$

ist

$$R \sim \chi_n \quad \text{und} \quad \mathbf{Y} \sim R(K_n^O(0,1))$$

mit der Dichte

$$\frac{1}{A_{K_n^O(0,1)}}$$

wobei

$$A_{K_n^O(0,1)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

die Fläche der n-dimensionalen Einheitskugel ist.

$\square$

Bem.: Die Fläche der n-dimensionalen Kugeloberfläche ist, vgl. Fichtenholz 3, S.389,

$$A_{K_n^O(0,r)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1}$$

$n = 2$: $\quad 2\pi r$

$n = 3$: $\quad 4\pi r^2 \qquad \left(\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$

$n = 4$: $\quad 4\pi^2 r^3$