

10 Transformation von Zufallsvariablen

Sei $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_X(x) = P(X < x)$.

Wir betrachten eine Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und sei Zufallsvariable $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $Y = g(X)$.

$$Y : \quad \Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xleftarrow{g} \mathbb{R}.$$

$$Y(\omega) = g(X(\omega)), \forall \omega \in \Omega.$$

Diese zufällige Variable besitzt die Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = P(\{\omega : Y(\omega) < y\}) \\ &= P(\{\omega : g(X(\omega)) < y\}) \\ &= P(X \in \underbrace{\{x : g(x) < y\}}_{\in \mathcal{B}^1}) = P(g(X) < y) \\ &= P(X \in g^{-1}(y)) \end{aligned}$$

Bem.: $\{x : g(x) < y\} \in \mathcal{B}^1$ gilt, wenn die Funktion g meßbar ist.

Frage: Wie berechnen wir $F_Y(y)$?

Fall 1: F diskret.

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= P(g(X) = y) \\ &= P(x : g(x) = y) \\ &= P(x : x = g^{-1}(y)) \\ &= P(X \in g^{-1}(y)) \\ &= P(g^{-1}(y)) \end{aligned}$$

Bsp. 56 Sei $Y = X^2$, wobei

$$X = \begin{cases} 1 & \text{mit Wkt. } \frac{1}{4} \\ 0 & \text{mit Wkt. } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{mit Wkt. } \frac{1}{4} \end{cases}$$

also $g(x) = x^2$, $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= P(X \in \sqrt{1}) = P(X = 1 \vee X = -1) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Fall 2: F stetig. Drei Schritte:

1. Finde für jedes y :

$$A_y = \{x : g(x) < y\}.$$

2. Die Verteilungsfunktion von Y ist

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = P(g(X) < y) \\ &= P(x : g(x) < y) = P(A_y) = \int_{A_y} f_X(x) dx \end{aligned}$$

3. Dichte von Y :

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y).$$

Bsp. 57 $X \sim R(0, \frac{\pi}{2})$., d.h. X hat die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & , \text{ falls } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} .$$

Welche Verteilung hat die ZV $Y = \sin(X)$?

1. Finde für jedes y , $y \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} A_y &= \{x : g(x) < y\} = \{x : \sin(x) < y\} \\ &= \{x : x < \arcsin(y)\} \end{aligned}$$

Offenbar $A_y = \emptyset$ für $y \leq 0$ und $A_y = \mathbb{R}$ für $y \geq 1$

2. *Die Verteilungsfunktion von Y ist*

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = \int_{A_y} f_X(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\arcsin(y)} dx = \frac{2}{\pi} \arcsin(y) \end{aligned}$$

3. *Dichte von Y : Für $y \in (0, 1)$:*

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

$$f_Y(y) = 0 \text{ sonst.}$$

Bsp. 58 Sei X stetig und $X \sim F_X$, d.h. X hat die Dichte f_X .

Welche Verteilung hat die ZV $Y = F_X(X)$?

1. Finde für jedes y , $y \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} A_y &= \{x : F_X(x) < y\} \\ &= \{x : x < F_X^{-1}(y)\} \end{aligned}$$

Offenbar $A_y = \emptyset$ für $y \leq 0$ und $A_y = \mathbb{R}$ für $y \geq 1$

2. *Die Verteilungsfunktion von Y ist*

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = P(F_X(X) < y) \\ &= P(X < F_X^{-1}(y)) \\ &= \int_{A_y} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{F_X^{-1}(y)} f_X(x) dx \\ &= F_X(F_X^{-1}(y)) - F_X(-\infty) = y \end{aligned}$$

3. *Dichte von Y :*

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & y \in (0, 1) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

D.h. $Y \sim \mathbb{R}(0, 1)$

Bsp. 59 Sei umgekehrt $U \sim \mathbb{R}(0, 1)$ und F eine Verteilungsfunktion mit Dichte f .

Welche Verteilung hat die ZV $Y = F^{-1}(U)$?

1. Finde für jedes y

$$\begin{aligned} A_y &= \{u : F^{-1}(u) < y\} \\ &= \{u : u < F(y)\} = (0, F(y)). \end{aligned}$$

2. *Die Verteilungsfunktion von Y ist*

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = P(F^{-1}(U) < y) \\ &= P(U < F(y)) \\ &= \int_{A_y} f_U(u) du = \int_0^{F(y)} f_U(u) du \\ &= \int_0^{F(y)} du = F(y). \end{aligned}$$

Also $Y \sim F$.

3. *Dichte von Y :*

$$f_Y(y) = f(y)$$

Wir fassen die Ergebnisse in einem Satz zusammen.

Satz 29 *Es sei X eine, auf dem Intervall $[a, b]$ definierte ($a = -\infty, b = +\infty$ ist erlaubt) Zufallsgröße mit der stetigen Dichtefunktion f . Die Funktion $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar und es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$). Dann hat die zufällige Variable $Y = g(X)$ die Dichtefunktion*

$$h(y) = f(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dg^{-1}}{dy}(y) \right| = \frac{f(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|}.$$

Bem. 14 *Die Voraussetzung $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ bewirkt, daß die Funktion g auf dem Intervall $[a, b]$ streng monoton ist.*

Beweis: Wir unterscheiden die Fälle $g' > 0$ und $g' < 0$.

Fall 1: Es sei $g'(x) > 0$, für alle $x \in [a, b]$, Da also die Funktion g streng monoton wachsend ist, ist die Menge $A_y = (-\infty, g^{-1}(y))$ ein Intervall und die Dichte von Y ist gegeben durch

$$\frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} (F_X(g^{-1}(y)) - F_X(-\infty)).$$

Anwendung der Kettenregel liefert die Behauptung.

Fall 2: Es gilt $g'(x) < 0$, für alle $x \in [a, b]$, Da also die Funktion g streng monoton fallend ist, ist die Menge $A_y = (g^{-1}(y), \infty)$ ein Intervall und die Dichte von Y ist

gegeben durch

$$\frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}(F_X(\infty) - F_X(g^{-1}(y))).$$

Anwendung der Kettenregel liefert die Behauptung.

□

Bem. 15 *Beachten Sie, dass in der Formel des Satzes Betragsstriche stehen.*

Die Ableitungsregel für die Umkehrfunktion läßt sich wie folgt herleiten:

$$1 = (g(g^{-1}(y)))' = g'(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y).$$

Die folgenden drei Beispiele wurden bereits oben behandelt. Sie folgen jetzt nochmal, diesmal direkte Anwendung des Satzes.

Bsp. 60 Es sei $X \sim R(0, \frac{\pi}{2})$., d.h. X hat die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & , \text{ falls } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} .$$

Wir betrachten die Funktion g ,

$$y = g(x) = \sin x .$$

Für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ gilt: $0 \leq g(x) < 1$. Die Umkehrfunktion von g ist

$$g^{-1}(y) = \arcsin y .$$

Wir betrachten eine Zufallsgröße Y mit $Y = \sin X$. Dann gilt

für die Dichte von Y nach Satz 29:

$$\begin{aligned} h(y) &= f(\arcsin y) \cdot \left| \frac{d \arcsin}{dy}(y) \right| \\ &= f(\arcsin y) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & , \text{ falls } 0 \leq y < 1 \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Bsp. 61 *Es sei X eine zufällige Variable mit einer auf einem bestimmten Intervall differenzierbaren Verteilungsfunktion $F(x) = P(X < x) \in [0, 1[$ und Dichte f .*

Die Dichte der Zufallsvariablen $Y = F(X)$ ist mittels Satz 29:

$$\begin{aligned} h(y) &= f(F^{-1}(y)) \cdot \frac{dF^{-1}}{dy}(y) \\ &= f(F^{-1}(y)) \cdot \frac{1}{F'(F^{-1}(y))} \\ &= \frac{f(F^{-1}(y))}{f(F^{-1}(y))} = 1 \end{aligned}$$

Das gilt für alle $y \in [0, 1[$, d.h.:

$$h(y) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } 0 \leq y < 1 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} .$$

Folglich gilt: $Y \sim R(0, 1)$!

Bem.: Wir haben also gezeigt: Wenn $X \sim F$ so ist die transformierte Zufallsvariable

$$Y = F(X) \sim R(0, 1)$$

Umgekehrt gilt: Ist $U \sim R(0, 1)$ und ist F eine beliebige Verteilungsfunktion, so ist $Y = F^{-1}(U) \sim F$.

Anwendung: Zufallszahlen (vgl. Kapitel ??).

Bsp. 62 *Es sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, d.h. X besitzt die Verteilungsfunktion*

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}, \quad x \geq 0.$$

Wegen $U := F(X) \sim R(0, 1)$ gilt für alle $\omega \in \Omega$:

$$U(\omega) = F(X(\omega)).$$

Wir bezeichnen $y := U(\omega)$ und $x := X(\omega)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} y &= F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x} \\ e^{-\lambda \cdot x} &= 1 - y \\ x &= -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y) \end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu:

$$X(\omega) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U(\omega)).$$

Folglich gilt: Die Zufallsgröße

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \sim \text{Exp}(\lambda).$$

ist exponentialverteilt mit dem Parameter λ .

Bsp. 63 *Es sei X eine Zufallsgröße mit der Dichtefunktion f . Desweiteren sei g die wie folgt definierte Funktion:*

$$g(x) = ax + b.$$

Wir betrachten nun eine weitere Zufallsgröße Y ,

$$Y = g(X) = aX + b, \quad a \neq 0.$$

Wir bezeichnen $y := g(x)$. Dann gilt:

$$g^{-1}(y) = x = \frac{y - b}{a}.$$

Für die Dichte der Zufallsvariable Y gilt nach Satz 29:

$$h(y) = f(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dg^{-1}}{dy}(y) \right| = f\left(\frac{y - b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|}$$

Bem.: Im Fall der Normalverteilung, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma > 0$, haben wir dieses Ergebnis implizit bereits in Abschnitt 9.1 (Satz 22) erhalten.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Es sei $(a = \frac{1}{\sigma}, b = \frac{\mu}{\sigma})$

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{bzw.} \quad X = \sigma Y + \mu.$$

Nach der in diesem Abschnitt hergeleiteten Formel ergibt sich die Dichtefunktion h der Zufallsgröße Y :

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{\left|\frac{1}{\sigma}\right|} f\left(\frac{y + \frac{\mu}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}}\right) = \sigma f(\sigma y + \mu) \\ &= \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma y + \mu - \mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \end{aligned}$$

Dichtefkt. einer Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$!

Das heißt: Eine normalverteilte Zufallsgröße wird in eine standard-normalverteilte Zufallsgröße transformiert, indem der Parameter μ subtrahiert und anschließend durch den Parameter σ dividiert wird. Sei also $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$,

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X < x) = P\left(\underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{=Y} < \frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Y < \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Es gilt: $Y \sim (0, 1)$. (vgl. auch Satz 22)