

# 9 Die Normalverteilung

Dichte:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

## 9.1 Standard-Normalverteilung

$$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 1$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} \quad \text{Dichte}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \quad \text{Verteilungsfunktion}$$

$\varphi(x)$ ,  $\Phi(x)$  sind tabelliert!

$$\varphi(x) = \varphi(-x)$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

Frage: Für welches  $x$  gilt:  $\Phi(x) = \alpha$ ?

$$x = \Phi^{-1}(\alpha) \quad \alpha\text{-Quantil.}$$

$\Phi^{-1}(\alpha)$  als Funktion: Quantilfunktion

Programm: `Descr_normal.sas`

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

$$P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

**Satz 22** *Es gilt:*

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1) \iff \sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff \alpha X + \beta \sim \mathcal{N}(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2)$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

**Beweis:** : Wir zeigen nur 1. ( $\rightarrow$ ). Sei  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

$$\begin{aligned} P(\sigma X + \mu \leq x) &= P\left(X \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{x - \mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(u - \mu)^2/(2\sigma^2)} du \end{aligned}$$

$$\frac{u - \mu}{\sigma} = t, \quad \frac{1}{\sigma} du = dt.$$

□

## 9.2 Berechnen von Wahrscheinlichkeiten

Vergleichen Sie

a)  $\sigma^2$  fest,  $\mu$  verschieden

b)  $\mu$  fest,  $\sigma^2$  verschieden

**Satz 23** : Sei  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_1^2)$ ,  $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_2^2)$ ,

$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$  und  $a > 0$ . Dann gilt:

$$P(\mu - a < X_1 < \mu + a) > P(\mu - a < X_2 < \mu + a).$$

## Beweis:

$$\begin{aligned} P(\mu - a < X_1 < \mu + a) &= P\left(\frac{-a}{\sigma_1} < \frac{X_1 - \mu}{\sigma_1} < \frac{a}{\sigma_1}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{a}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(-\frac{a}{\sigma_1}\right) \\ &> \Phi\left(\frac{a}{\sigma_2}\right) - \Phi\left(-\frac{a}{\sigma_2}\right) \\ &= P(\mu - a < X_2 < \mu + a). \end{aligned}$$

□

## Programm:

Descr\_Normal\_1.sas

Beispiel:  $X_1 \sim \mathcal{N}(10, 4)$ ,  $X_2 \sim \mathcal{N}(10, 9)$ ,  $a = 1$ .

$$\begin{aligned} P(9 < X_1 < 11) &= \Phi\left(\frac{11 - 10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{9 - 10}{2}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - (1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)) \\ &= 2 \cdot \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.6915 - 1 = 0.383. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(9 < X_2 < 11) &= \Phi\left(\frac{11 - 10}{3}\right) - \Phi\left(\frac{9 - 10}{3}\right) \\&= \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) \\&= \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - (1 - \Phi\left(\frac{1}{3}\right)) \\&= 2 \cdot \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - 1 \\&= 2 \cdot 0.6293 - 1 = 0.2586.\end{aligned}$$

Programm:

```
Descr_Normal_2.sas
```

Für die Berechnung der Wktn.  $P(X < x)$  bei Standard–Normalverteilung existieren Programme und Tabellen.

Zu beachten:

- $x \geq 0$ . In diesem Fall kann der Wert für  $P(X < x)$  direkt aus der Tabelle abgelesen werden.
- $x < 0$ .  $P(X < x) = \Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ , z.B.

$$P(X < -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 0.15.$$



- $P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$ , z.B.

$$\begin{aligned} P(-1 \leq x \leq 1) &= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) \\ &= 2\Phi(1) - 1 \approx 0.68. \end{aligned}$$

## Bsp. 52

- $Y \sim N(0, 1)$ :  $P(Y < 0) = \frac{1}{2}$  (*lt. Tabelle*);
- $X \sim N(1, 2^2)$ :  $P(X < 0) = \Phi\left(\frac{0-1}{2}\right) = \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1 - 0.691 = 0.309$ .

**Def. 32** Sei die Verteilungsfunktion  $F$  und die Wkt.  $p$  gegeben. Ein Wert  $x_p$  mit

$$p = P(X < x_p) = F(x_p)$$

heißt  $p$ -Quantil der Zufallsvariablen  $X$ , der Verteilungsfunktion (oder nur der Verteilung)  $F$ .

**Bsp. 53** Sei  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Gesucht ist das  $p = 0.95$ -Quantil von  $Y$ .

Für die Standard-Normalverteilung kann man aus der Tabelle für  $p = 0.95$  den Wert  $x_p(0, 1) \approx 1.645$  ablesen.

Sei  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Bestimmen das  $p$ -Quantil  $x_p(\mu, \sigma)$ :

$$\begin{aligned} p &= P(X < x_p(\mu, \sigma)) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{x_p(\mu, \sigma) - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P(Y < x_p(0, 1)), \quad Y \sim \mathcal{N}(0, 1). \end{aligned}$$

D.h.

$$x_p(0, 1) = \frac{x_p(\mu, \sigma) - \mu}{\sigma},$$

woraus durch Umstellen folgt:

$$x_p(\mu, \sigma) = \sigma \cdot x_p(0, 1) + \mu.$$

## 9.3 $k \cdot \sigma$ -Intervalle

**Def. 33** Für eine normalverteilte Zufallsvariable

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$  ist  $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$  ein  $k \cdot \sigma$ -Intervall,

$k \in \mathbb{Z}^+$ . Interessant sind dabei die Wahrscheinlichkeiten:

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma).$$

$$\begin{aligned} P(X \in [\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]) &= \Phi\left(\frac{\mu + k\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - k\sigma - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi(k) - \Phi(-k) \\ &= \Phi(k) - (1 - \Phi(k)) \\ &= 2 \cdot \Phi(k) - 1 \end{aligned}$$

$$P(X \in k \cdot \sigma\text{-Intervall}) = 2 \cdot \Phi(k) - 1.$$

**Bsp. 54**  $k \cdot \sigma$ -Intervalle für  $k = 1, \dots, 5$  gilt:

$k$	$2 \cdot \Phi(k) - 1$
1	0.6827
2	0.9545
3	0.9973
4	$\approx 1$
5	$\approx 1$

**Bsp. 55** Ein Zeitungsverkäufer sieht die Nachfrage  $X$  nach einer Tageszeitung als angenähert normalverteilt an. Das  $2 \cdot \sigma$ -Intervall sei  $[322, 408]$ . Wie groß ist die Wkt., daß mindestens 400 Exemplare der Zeitung verkauft werden?

Die Frage ist also:  $P(X \geq 400) = ?$

Nach Voraussetzung gilt nun:

$$322 = \mu - 2\sigma,$$

$$408 = \mu + 2\sigma.$$

Wir addieren beide Gleichungen und erhalten:

$$730 = 2\mu \quad \Longrightarrow \quad \mu = 365.$$

Durch Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung erhalten wir dann:

$$86 = 4\sigma \quad \Longrightarrow \quad \sigma = 21,5.$$

$$\begin{aligned}
P(X \geq 400) &= 1 - P(X < 400) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{400 - \mu}{\sigma}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{400 - 365}{21.5}\right) \\
&\approx 1 - \Phi(1.63) \\
&\approx 1 - 0.95 = 0.05
\end{aligned}$$

Wir sehen also: Hat man ein  $k \cdot \sigma$ -Intervall gegeben (und es wird Normalverteilung angenommen), so ist es möglich, jede andere Wahrscheinlichkeit auszurechnen.

Anwendung z.B. bei der Untersuchung von Toleranzen bei Werkstückmaßen oder bei Gewichtseinlagen von Gerichten.

## 9.4 Besonderheiten der Normalverteilung

### 9.4.1 Zentraler Grenzwertsatz

Seien  $X_i$  unabhängig, identisch verteilt,

$$\mathbf{E}X_i = \mu, \text{Var } X_i = \sigma^2.$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$Z_n := \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \rightarrow Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Beweis: siehe Grenzwertsätze.



## 9.4.2 Fehlertheorie

**Satz 24** *Fehler sind unter folgenden Annahmen (asymptotisch) normalverteilt:*

*V1: Jeder Fehler ist Summe einer sehr großen Anzahl sehr kleiner, gleich großer Fehler, die verschiedene Ursachen haben.*

*V2: Die verschiedenen Fehlerkomponenten sind unabhängig.*

*V3: Jede Fehlerkomponente ist mit Wkt. 0.5 positiv und mit Wkt. 0.5 negativ.*

**Beweis:** : Seien  $\epsilon_j, j = 1, \dots, n$  die Fehlerkomponenten.

$$V3 \Rightarrow P(\epsilon_j = \pm\epsilon) = \frac{1}{2}, \text{ d.h. } \mathbf{E}\epsilon_j = 0, \quad \text{var}\epsilon_j = \epsilon^2$$

V1  $\Rightarrow$  Gesamtfehler  $X = \sum_j \epsilon_j$ , also

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(\epsilon_j) = 0$$

$$\text{var}(X) = \sum_{j=1}^n \text{var}(\epsilon_j) = n\epsilon^2 =: \sigma^2$$

Charakteristische Funktion von  $\epsilon_j$ :

$$\phi_{\epsilon_j}(t) = \mathbf{E}(e^{it\epsilon_j}) = \frac{1}{2}(e^{it\epsilon} + e^{-it\epsilon}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it\epsilon)^{2k}}{(2k)!}$$

Charakteristische Funktion von  $X$ :

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \prod_{j=1}^n \phi_{\epsilon_j}(t) \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2!}\epsilon^2 + \frac{t^4}{4!}\epsilon^4 - + \dots\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} \frac{\sigma^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{t^2 \sigma^2 / 2!}{n}\right)^n + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-t^2 \sigma^2 / 2}\end{aligned}$$

Das ist die char. Fkt. von  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

□

### 9.4.3 Maximale Entropie bei gegebenen Mittelwert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$ .

$f$ : Wkt.dichte auf  $(-\infty, \infty)$ .

$$(*) \quad \int x f(x) dx = \mu, \quad \int (x - \mu)^2 f(x) dx = \sigma^2$$

Entropie:

$$H(f) := - \int f(x) \log f(x) dx$$

ist zu maximieren unter den obigen Bedingungen (\*).

$\implies f = \text{Normaldichte.}$

**Satz 25** : *Eine Dichtefunktion, die die Entropie unter den obigen Bedingungen maximiert ist normal.*

Zum Beweis verwenden wir die Jensensche Ungleichung:

## Lemma 26 (Jensensche Ungleichung für konkave Funktionen)

*Es sei  $g$  eine differenzierbare und konkave Funktion, und sei  $X$  eine zufällige Variable. Dann gilt:*

$$\mathbf{E}g(X) \leq g(\mathbf{E}X).$$

**Beweis:** Sei  $T(x)$  die Tangente an die Kurve der Funktion  $g$  im Punkt  $x_0$ ,

$$g(x) \leq T(x) = g(x_0) + \underbrace{g'(x_0)}_{\text{Anstieg der Kurve in } x_0} \cdot (x - x_0).$$

Wir setzen nun  $x := X$  und  $x_0 := \mathbf{E}X$  und erhalten:

$$g(X) \leq g(\mathbf{E}X) + g'(\mathbf{E}X) \cdot (X - \mathbf{E}X).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}g(X) &\leq \mathbf{E}(g(\mathbf{E}X) + g'(\mathbf{E}X) \cdot (X - \mathbf{E}X)) \\ &= g(\mathbf{E}X) + g'(\mathbf{E}X) \cdot \underbrace{\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)}_{=0} \\ &= g(\mathbf{E}X)\end{aligned}$$

□

**Beweis:** (des Satzes)

Seien  $p$  und  $q$  beliebige Dichten. Da die

Logarithmus-Funktion konkav ist folgt aus der Jensenschen

Ungleichung:

$$\begin{aligned}\int \ln\left(\frac{q}{p}(x)\right)p(x) dx &= \mathbf{E}_p \ln\left(\frac{q}{p}(X)\right) \\ &\leq \ln \mathbf{E}_p\left(\frac{q}{p}(X)\right) \\ &= \ln \int \left(\frac{q}{p}(x)p(x) dx\right) \\ &= \ln\left(\int q(x) dx\right) = \ln 1 = 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$H(p) = - \int p \ln p dx \leq - \int p \ln q dx$$



Wir wählen  $q$  wie folgt:

$$\ln q = \alpha + \beta(x - \mu) + \gamma(x - \mu)^2,$$

wobei  $\alpha, \beta, \gamma$  so gewählt sind, daß  $q$  Dichte und  $q \sim (\mu, \sigma^2)$ .

Also

$$\begin{aligned} H(p) &\leq - \int p \ln q \, dx \\ &= - \int p(x) (\alpha + \beta(x - \mu) + \gamma(x - \mu)^2) \, dx \\ &= -(\alpha + \gamma\sigma^2) \end{aligned}$$

feste obere Schranke für die Entropie.

Diese Schranke wird angenommen für  $p = q$ , also

$$\begin{aligned}\ln p &= \alpha + \beta(x - \mu) + \gamma(x - \mu)^2 \\ p &= e^{\alpha + \beta(x - \mu) + \gamma(x - \mu)^2}\end{aligned}$$

Offen: Gibt es  $\alpha, \beta, \gamma$  mit  $p$  Dichte und  $p \sim (\mu, \sigma^2)$ ?

Antwort: ja,  $\alpha = -\ln(\sqrt{2\pi}\sigma)$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = -\frac{1}{2\sigma^2}$ . □

## 9.4.4 Die Summe normalverteilter Zufallsvariablen ist normalverteilt.

**Satz 27** *Seien*

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \quad X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

*unabhängig. Dann:*

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

**Beweis:** : (allgemeiner für  $n$  Zufallsvariablen)

Seien  $X_j, i = j, \dots, n$  Zufallsvariablen mit

$$X_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2).$$

Charakteristische Funktion von  $X = \sum_{j=1}^n$ :

$$\phi_X(t) = \prod_{j=1}^n e^{it\mu_j - \sigma_j^2 t^2 / 2} = e^{it\mu - \sigma^2 t^2 / 2}$$

wobei  $\mu = \sum \mu_j, \sigma^2 = \sum \sigma_j^2 \Rightarrow X \sim (\mu, \sigma^2)$  □

## 9.4.5 Treffen einer Zielscheibe

**Satz 28** Sei  $(X, Y)$  zweidimensionale Zufallsvariable.

Folgende Annahmen seien erfüllt:

- V1: Die Randverteilungen von  $X$  und  $Y$  seien stetig
- V2: Die Dichte  $h(x, y)$  von  $(X, Y)$  hängt nur vom Abstand  $\sqrt{x^2 + y^2}$  vom Nullpunkt ab (Radialsymmetrie)
- V3: Die Fehler in  $x$ - und  $y$ -Richtung sind unabhängig.

Sei  $Z$  die zufällige Abweichung in beliebiger Richtung. Dann  
ist

$$Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

**Beweis:** siehe Abschnitt 11.3.

□