7.4 Charakteristische Funktionen

Def. 25 *Sei X Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X und Dichte f_X (falls X stetig) oder Wkt.funktion p_i (falls X diskret). Die Funktion*

$$\phi_X(t) := \mathbf{E}e^{itX} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)\, dx \\ \sum_{j=1}^{\infty} e^{itx_j} p_j \end{cases}$$

heißt charakteristische Funktion von X.

Bem. 7 *Die Funktion ϕ_X ist (bis auf den Faktor $\sqrt{2\pi}$) die Fourier-Transformierte von f_X.*

Bem. 8 *Die charakterische Funktion existiert.*

Satz 15 (Eigenschaften)

(i) $\phi_X(t)$ *ist in* $-\infty < t < \infty$ *gleichmäßig stetig.*

$$\begin{aligned} |\phi_X(t)| &\leq 1 \\ \phi_X(0) &= 1 \\ \phi_X(-t) &= \overline{\phi_X(t)} \end{aligned}$$

(ii) *Für die Zufallsvariable*

$$Y = aX + b$$

gilt:

$$\phi_Y(t) = \phi_X(at)e^{ibt}$$

(iii) $\phi_X(t)$ *ist reellwertig* $\Leftrightarrow X$ *bzgl.* $x = 0$ *symmetrisch ist.*

Beweis: ÜA, Eigenschaften der Fkt. e^{it}. $\square$

Satz 16 (Multiplikationssatz) *Seien die Zufallsvariablen X_1 und X_2 unabhängig mit den charakteristischen Funktionen ϕ_1 und ϕ_2. Dann hat die Zufallsvariable $X_1 + X_2$ die charakteristische Funktion $\phi_1 \cdot \phi_2$.*

Beweis: Es gilt:

$$\phi_{X_1+X_2}(t) = \mathbf{E}e^{it(X_1+X_2)} = \mathbf{E}e^{itX_1} \cdot \mathbf{E}e^{itX_2} = \phi_1(t) \cdot \phi_2(t)$$

$\square$

Satz 17 (Eindeutigkeitssatz) *Die Beziehung*

$$F_X \Leftrightarrow \phi_X$$

ist eineindeutig.

Für X *stetig gilt:*

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi_X(t)\, dt$$

Für X *diskret gilt:*

$$p_j = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} e^{-itx_j} \phi_X(t)\, dt$$

Beweis: siehe z.B. Günther, Grundkurs Analysis, Teil 3. $\square$

Satz 18 (Konvergenzsatz) *Seien X_n Zufallsvariablen mit $X_n \sim F_n$. Dann gilt*

$$F_n \rightarrow F \Leftrightarrow \phi_n \rightarrow \phi, \quad \phi \quad \textit{stetig in} \quad t = 0.$$

Satz 19 (Erzeugung der Momente) *Sei* $\mathbf{E}X^k < \infty$.
Dann gilt:

$$\alpha_k := \mathbf{E}X^k = \frac{1}{i^k}\phi_X^{(k)}(0)$$

Beweis: Vertauschen von Integration und Differentiation. $\square$

Die charakteristische Funktion hat also die Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \mathbf{E}e^{itX} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!}\mathbf{E}X^j \\ &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \frac{(it)^j}{j!} + o(t^k), \quad t \to 0.\end{aligned}$$

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}e^{itX} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2itx+(it)^2-(it)^2}{2}}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}\, dx \qquad z = x - it \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty+it}^{\infty+it} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \\
&= e^{-\frac{t^2}{2}}.
\end{aligned}$$

$Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

$$\mathbf{E}e^{itY} = \mathbf{E}e^{it(\sigma X+\mu)} = e^{it\mu}\phi_X(\sigma t)$$

8 Die Exponentialverteilung

8.1 Einführung

Modelle

Zuverlässigkeitsmodelle

Lebensdauermodelle

Bedienungsmodelle.

Def. 26 (Exponentialverteilung) *Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $[0, \infty)$. Sie heißt exponentialverteilt mit dem Parameter λ, $\lambda > 0$, falls die Verteilungsfunktion beschrieben wird durch*

$$F(t) = P(X < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \textit{falls} \quad t \geq 0 \\ 0 & \textit{sonst}. \end{cases}$$

Die Dichte der Exponentialverteilung ist

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \textit{falls} \quad t \geq 0 \\ 0 & \textit{sonst}. \end{cases}$$

Erwartungswert

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \int_0^\infty x \cdot f(x)\,dx \\
&= \int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx \\
&\qquad\quad u \quad\; v' \\
&= x \cdot (-e^{-\lambda x})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty 1 \cdot (-e^{-\lambda x})\,dx \\
&\quad\; u \qquad\quad v \qquad\qquad\qquad\quad u' \qquad\quad v \\
&= 0 + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{-1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Der Erwartungswert einer exponential verteilten Zufallsvariable, $X \sim Exp(\lambda)$, ist

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{\lambda}.$$

Varianz

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}X^2 &= \int_0^\infty x^2 \cdot f(x)\,dx \\
&= \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx \\
&\qquad\quad u \qquad v' \\
&= x^2(-e^{-\lambda x})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty 2x \cdot (-e^{-\lambda x})\,dx \\
&\quad\; u \qquad\quad v \qquad\qquad\qquad\qquad u' \qquad\quad v \\
&= \frac{2}{\lambda} \cdot \mathbf{E}X = \frac{2}{\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Var}X &= \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \\
\sigma_X &= \frac{1}{\lambda} \quad \text{(Standardabweichung)} \\
\text{Schiefe} &= \frac{\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^3}{(\text{Var}X)^{3/2}} = 2 \\
\text{Kurtosis} &= \frac{\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^4}{(\text{Var}X)^2} = 9
\end{aligned}
$$

Bsp 47 *Die zufällige Wartezeit eines Kunden am Schalter sei exponentialverteilt mit einem Erwartungswert von 10 min.*

Wie groß ist die Wkt,. dass Sie mindestens 15 min. warten müssen?

X*: zufällige Wartezeit eines Kunden am Schalter,*

$$X \sim Exp(\lambda), \quad \lambda = \frac{1}{10}.$$

Frage: $P(X > 15)$ *?*

$$\begin{aligned} P(X > 15) &= e^{-15\lambda} \\ &= e^{-1.5} \approx 0.220. \end{aligned}$$

8.2 Gedächtnislosigkeit

Def. 27 (Gedächtnislosigkeit) *Eine Verteilung P (mit Verteilungsfunktion F) heißt gedächtnislos, wenn für alle $s, t \geq 0$, gilt:*

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s).$$

Bem. 9 *Bei stetigen Verteilungen ist das äquivalent zu*

$$P(X \geq s + t | X \geq t) = P(X \geq s).$$

Es gilt (Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit)

$$
\begin{aligned}
P(X \geq s+t | X \geq t) &= \frac{P(\{X \geq s+t\} \cap \{X \geq t\})}{P(X \geq t)} \\
&= \frac{P(X \geq s+t)}{P(X \geq t)}.
\end{aligned}
$$

Eine Verteilung(sfunktion) ist also gedächtnislos, genau dann wenn

$$\frac{P(X \geq s+t)}{P(X \geq t)} = P(X \geq s)$$

bzw.

$$\frac{1-F(s+t)}{1-F(t)} = 1-F(s).$$

Def. 28 *Die Funktion*

$$G(t) = 1-F(t)$$

heißt Überlebensfunktion (oder Zuverlässigkeitsfunktion).

Die Verteilungsfunktion F (mit der Überlebensfunktion G) ist also gedächtnislos genau dann wenn

$$G(s+t) = G(s) \cdot G(t) \quad \text{für alle} \quad s,t \geq 0$$

Cauchy- Funktionalgleichung

Satz 20 *Die Exponentialverteilung ist gedächtnislos.*

Beweis: Die Verteilungsfunktion ist

$$F(t) = P(X < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{falls} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und die Überlebensfunktion

$$G(t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

Folglich erhalten wir

$$G(s + t) = e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s} e^{-\lambda t} = G(s) \cdot G(t).$$

$\square$

Satz 21 *Sei F eine stetige Verteilungsfunktion mit* $F(0) = 0$ *und* $G(t) = 1 - F(t)$. *Es gelte die Cauchy-Funktionalgleichung*

$$G(s+t) = G(s) \cdot G(t) \quad \text{für alle} \quad s, t \geq 0. \tag{1}$$

Dann gilt für alle t, $t > 0$,

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

wobei $\lambda > 0$. D.h. F ist Exponential-Verteilungsfunktion.

Beweis: 1. Es gilt:

$$G(t) = G(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}) = \big(G(\frac{t}{2})\big)^2 \geq 0,$$

d.h. $G(t) \geq 0$ für alle t.

Angenommen, es existiert ein t_0 mit $G(t_0) = 0$, dann folgt:

$$G(t) = G(t - t_0 + t_0) = G(t - t_0) \cdot G(t_0) = 0$$

für alle t, d.h. wir erhalten die triviale Lösung für die obige Cauchy-Funktionalgleichung, die jedoch wegen $G(0) = 1 - F(0) = 1$ nicht zugelassen ist.

2. Es gilt also $G(t) > 0$ für alle t.

Sei m, $m > 0$, eine natürliche Zahl. Dann folgt aus (1) für alle $t > 0$:

$$G(t) \quad = \quad G(\underbrace{\frac{t}{m} + \ldots + \frac{t}{m}}_{m \text{ mal}}) = \big(G(\frac{t}{m})\big)^m,$$

insbesondere

$$G(1) = \big(G(\frac{1}{m})\big)^m \qquad \text{oder} \qquad G(\frac{1}{m}) = \big(G(1)\big)^{\frac{1}{m}}$$

3. Für rationale Zahlen $r = \frac{m}{n}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
G(r) &= G(\frac{n}{m}) = G(\underbrace{\frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}}_{n \text{ mal}}) \\
&= \Big(G(\frac{1}{m})\Big)^n \\
&= \Big(G(1)\Big)^{\frac{n}{m}} \\
&= \Big(G(1)\Big)^r.
\end{aligned}$$

4. Da die Funktion $(G(1))^t$ stetig ist auf $\mathbb{R}^+$ folgt für alle $t > 0$:

$$G(t) = G(1)^t = e^{t \cdot \ln(G(1))}$$

5. Wir setzen $\lambda := -\ln G(1)$.

Da F als Verteilungsfunktion monoton wachsend ist, ist G monoton fallend, d.h. $\ln G(1) < 0$ und $\lambda > 0$. Wir erhalten demnach

$$G(t) = e^{-\lambda \cdot t},$$

also

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}.$$

Bsp 48 (Fortsetzung von Beispiel 1) *Der Kunde hat schon 10 min. gewartet. Wie groß ist die Wkt., daß er insgesamt länger als 15 min. warten muss ?*

$$\begin{aligned} P(X > 15|X > 10) = P(X > 5) &= e^{-5\lambda} = e^{-0.5} \\ &\approx 0.604. \end{aligned}$$

Bsp 49 *Postschalter mit 2 Personen besetzt. Die Bedienungszeit sei zufällig, exponential verteilt, mit Erwartungswert $\frac{1}{\lambda}$. Es werden gerade zwei Kunden bedient, Sie sind der nächste.*

Frage: Wkt. dafür, daß Sie nicht der letzte der 3 Kunden sind?

Antwort: Sie werden bedient, sobald der erste Platz frei wird.
Wegen der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung hat die Bedienungszeit des anderen Kunden dieselbe Verteilung wie Ihre.

$$P = 0.5.$$

Bem. 10 *Unter den diskreten Verteilungen hat nur die geometrische Verteilung diese Eigenschaft (siehe Abschnitt 6).*