

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	<b>5</b>
1	Grundbegriffe . . . . .	6
1.1	Einleitung, Geschichte . . . . .	6
1.2	Zufällige Ereignisse . . . . .	10
1.3	Ereignisfelder . . . . .	19
1.4	Kolmogoroff'sches Axiomensystem . . . . .	22
1.5	Folgerungen . . . . .	26
1.6	Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit . . . . .	40
2	Kombinatorik . . . . .	43
2.1	Klassische kombinatorische Probleme . . . . .	43
2.2	Beispiele . . . . .	48
2.3	Arithmetische Beziehungen zwischen den Binomialkoeffizienten . . . . .	57
2.4	Die Stirling Formel . . . . .	59
3	Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit von Ereignissen . . . . .	67
4	Anwendung bedingter Wahrscheinlichkeiten . . . . .	77
5	Klassische Wahrscheinlichkeitsräume . . . . .	91
5.1	Binomiale Wahrscheinlichkeiten . . . . .	91
5.2	Multinomiale Wahrscheinlichkeiten . . . . .	95
5.3	POISSON-Wahrscheinlichkeiten . . . . .	96

<b>2</b>	<b>Zufallsvariablen</b>	<b>99</b>
1	Grundbegriffe	100
2	Eigenschaften der Verteilungsfunktion	118
3	Diskrete zufällige Variablen	122
4	Charakteristika von Verteilungsfunktionen	142
4.1	Der Erwartungswert	142
4.2	Moment und Varianz	154
4.3	Schiefe und Exzeß	168
4.4	Charakteristische Funktionen	169
5	Die Exponentialverteilung	175
5.1	Einführung	175
5.2	Gedächtnislosigkeit	179
5.3	Zuverlässigkeitsmodelle	186
6	Die Normalverteilung	204
6.1	Standard-Normalverteilung	204
6.2	Berechnen von Wahrscheinlichkeiten	206
6.3	$k \cdot \sigma$ -Intervalle	210
6.4	Besonderheiten der Normalverteilung	213
7	Transformation von Zufallsvariablen	219
8	Mehrdimensionale Zufallsvariablen	229
8.1	Begriffe	229
8.2	Unabhängigkeit von Zufallsgrößen	244
8.3	Transformationssatz für Zufallsvektoren	248
8.4	Korrelation	268
<b>3</b>	<b>Grenzwertsätze</b>	<b>277</b>
1	Ungleichungen	278
2	Das Gesetz der großen Zahlen	285
3	Der Satz von GLIVENKO–CANTELLI	291
4	Konvergenz von Folgen zufälliger Variablen	294
5	Der zentrale Grenzwertsatz	306

<b>4</b>	<b>Grundlagen der Simulation</b>	<b>325</b>
1	Einführung . . . . .	326
2	Erzeugung von Zufallszahlen . . . . .	329
	2.1 Exakte Methoden von Hand . . . . .	329
	2.2 Elektronische Erzeugung . . . . .	332
	2.3 Mathematische Erzeugung . . . . .	332
	2.4 Eigenschaften von Pseudozufallszahlen . . . . .	336
3	Statistische Tests von Pseudozufallszahlen . . . . .	342
	3.1 Test auf Gleichverteilung . . . . .	347
	3.2 Test auf Unabhängigkeit . . . . .	356
4	Erzeugung spezieller Verteilungen . . . . .	363
	4.1 Erzeugung diskreter Zufallsvariablen . . . . .	363
	4.2 Erzeugung stetiger Zufallsvariablen . . . . .	364
	4.3 Weitere Simulationen . . . . .	380
<b>5</b>	<b>Markoff'sche Ketten</b>	<b>389</b>
1	Definitionen und einfache Zusammenhänge . . . . .	391
2	Klassifikation der Zustände . . . . .	400
3	Rekurrente und transiente Zustände . . . . .	406
4	Grenzverteilungen . . . . .	417
5	Klassische Beispiele . . . . .	435
	5.1 Ruin des Spielers . . . . .	435
	5.2 Irrfahrten . . . . .	444
6	Simulated Annealing . . . . .	450
	6.1 Einführung . . . . .	450
	6.2 Allgemeine Formulierung . . . . .	459
	6.3 Analyse des SA-Prozesses . . . . .	468
	6.4 Wahl der Parameter . . . . .	475
	6.5 Empirische Analyse des SA-Algorithmus . . . . .	491

## **Literatur**

Mathar, R. und Pfeiffer, D. (1990) Stochastik für Informatiker, Stuttgart

Pflug, G. (1986). Stochastische Modelle in der Informatik, Stuttgart

Greiner, M. und Tinhofer, G. (1996) Stochastik für Studienanfänger der Informatik, München

Rosanov, J.A. (1970). Wahrscheinlichkeitstheorie, Berlin

Flachsmeyer, J. (1970). Kombinatorik, Berlin



# Kapitel 1

## Wahrscheinlichkeitsrechnung

### Contents

---

<b>1</b>	<b>Grundbegriffe</b> .....	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Kombinatorik</b> .....	<b>43</b>
<b>3</b>	<b>Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit von Ereignissen</b> .....	<b>67</b>
<b>4</b>	<b>Anwendung bedingter Wahrscheinlichkeiten</b> .....	<b>77</b>
<b>5</b>	<b>Klassische Wahrscheinlichkeitsräume</b> ..	<b>91</b>

---

# 1 Grundbegriffe

1.1 Einleitung, Geschichte

1.2 Zufällige Ereignisse

1.3 Ereignisfelder

1.4 Kolmogorov'sches Axiomensystem

1.5. Folgerungen

1.6. Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

## 1.1 Einleitung, Geschichte

- antikes Griechenland

Begriff der Wkt.

Naturgesetze drücken sich durch eine Vielzahl von zufälligen Erscheinungen aus.

Stäbchenspiel

- 1654, Chevalier de Mere, Pascal

Würfelspiele, Würfe mit 2 Würfeln. Wenn in 25 Würfen einmal eine Doppelsechs so hat C.d.M. gewonnen, sonst sein Gegner.

- Pascal, Fermat (Briefwechsel)

2 Personen-Spiele. Gespielt wird eine Serie von Partien, z.B. Schach (nur 0,1). Gewinnen soll der Spieler, der zuerst  $S$  Partien gewonnen hat, d.h. dieser Spieler erhält den vollen Einsatz.

Abbruch des Spiels (z.B. wegen Zeitmangel)

A hat  $a$  Gewinnpartien,  $a < S$

B hat  $b$  Gewinnpartien,  $b < S$

Wie ist der Einsatz nach dem Abbruch gerecht zu verteilen?

Variante:  $\frac{a}{b}$ , aber  $S$  wird nicht berücksichtigt!

Es wäre also der weitere mögliche Verlauf nach dem Abbruch zu analysieren.

- 1662, Graunt; 1693 Halley

Sterlichkeitstafeln (Überlebenswkt. in Abhängigkeit vom Lebensalter) → Rentenberechnung

Schiffsversicherung

- 1713, Jacob Bernoulli

“Ars conjectandi”: 1. Lehrbuch der Wkt.rechnung

Bernoulli-Gesetz der Großen Zahlen,  $p = P(A)$

$h_n(A) = \frac{1}{n} \# \text{ Auftreten v. } A, h_n(A) - p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

- 1733, Moivre

Grenzwertsatz von Moivre-Laplace

$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$

- 1812, Laplace

klassische Definition der Wkt.

$$P(A) = \frac{\# \text{für } A \text{ günstige Ereignisse}}{\# \text{mögliche Ereignisse}}$$

- 1800, Laplace, Gauss

Untersuchung von Beobachtungsfehlern

Kleinste Quadrat-Schätzung

- Ende 19. Jh., Tschebyscheff, Markov, Ljapunov

- 1900, David Hilbert (2. Intern.Mathematikerkongress

Paris) 23 Probleme der Mathematik, u.a. Axiomatik der Wkt.rechnung.

- 1919 R.v. Mises

statistische Definition der Wkt,

Erfahrung:  $P(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(A)$

Existiert der Grenzwert?

- 1933, A.N. Kolmogorov

Axiomensystem der Wkt.rechnung

Statistik:

Gesamtheit aller Methoden zur Analyse zufalls-  
behafteter Datenmengen

→ Aussagen über die zugrundeliegende  
Grundgesamtheit treffen.

+ Wahrscheinlichkeitsrechnung:

gegebene Grundgesamtheit (Verteilung)

→ Aussagen über Realisierungen einer  
Zufallsvariablen treffen.

---

= Stochastik

(grch.: im Rechnen geschickt).

## 1.2 Zufällige Ereignisse

**Def. 1.1** Ein zufälliger Versuch (*Experiment*) ist ein Versuch mit ungewissem Ausgang.

Beispiel: Glücksspiele.

Wichtig bei solchen Experimenten ist:

- die Beschreibung des Experiments (Kartenspiele, Münzwurf),
- die Erfassung der Menge aller möglichen Ausgänge des Experiments.

## Def. 1.2 (Grundbegriffe)

- *Elementarereignis: möglicher Versuchsausgang, Bez.:  $\omega$ .*
- *Ereignis: Menge von El.ereignissen,  $A \subset \Omega$*
- *sicheres Ereignis: Menge aller El.ereignisse, Bez:  $\Omega$ .*
- *unmögliches Ereignis:  $\emptyset$ .*
- *Komplementärereignis:  $\overline{A} = \Omega \setminus A$*

Ein Experiment kann diskret sein, d.h. endlich oder abzählbar viele Ausgänge besitzen, oder es kann überabzählbar viele Ausgänge haben.

## **Bsp. 1.1 : Experimente mit einer endlichen Anzahl von Elementarereignissen**

### *a) Münzwurf*

*Folgende Ereignisse können auftreten:*

- *zwei Elementarereignisse:  $\{\text{Zahl } (z)\}, \{\text{Wappen } (w)\}$ ;*
- *das unmögliche Ereignis  $\emptyset = \{z\} \cap \{w\}$ ;*
- *das sichere Ereignis  $\Omega := \{z, w\}$ . Das bedeutet, daß Zahl oder Wappen eintreten.*

*Die Menge der auftretenden Ereignisse ist*

$$\mathcal{P}(\Omega) := \{\emptyset, \{z\}, \{w\}, \Omega\},$$

*die Potenzmenge von  $\Omega$ .*

### *b) Würfeln (1 mal)*

*Die Elementarereignisse sind  $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$  und  $\{6\}$ , d.h.  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .*

*Damit erhalten wir für paarweise verschiedene  $i, j, k, l, m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  die möglichen Ereignis-*

*nisse :*

Ereignistyp	Anzahl
$\emptyset$	1
$\{i\}$	6
$\{i, j\}$	15
$\{i, j, k\}$	20
$\{i, j, k, l\}$	15
$\{i, j, k, l, m\}$	6
$\Omega$	1
<hr/>	
insgesamt	$2^6 = 64$

*Menge der auftretenden Ereignisse ist die Potenzmenge von  $\Omega$ .*

**Bsp. 1.2 : Experimente mit abzählbar  
vielen Elementarereignissen)**

*1. Werfen einer Münze, bis zum ersten Mal die Zahl fällt*

$$\Omega = \{z, wz, wwz, wwwz, \dots\}.$$

*2. Anzahl der ankommenden Fahrzeuge an einer Kreuzung in einem bestimmten Zeitbereich*

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

## **Bsp. 1.3 : Experimente mit überabzählbar vielen Elementarereignissen**

### *1. Lebensdauer einer Glühbirne*

$$\Omega = [0, \infty[ = \mathbb{R}^+.$$

*Ereignisse sind bei diesem Experiment z.B. Intervalle und Punkte.*

*Es gilt beispielsweise:  $\emptyset = [0, 1] \cap [3, 5]$ .*

*Das Ereignis  $A = \{[0.4, 3.1], \{7\}\}$  bedeutet, daß die Glühbirne eine Lebensdauer von 7s oder eine Lebensdauer zwischen 0.4s und 3.1s hat.*

### *2. Messung einer physikalischen Konstante*

$$\underbrace{y}_{\text{Meßwert}} = \underbrace{m}_{\text{Konstante}} + \underbrace{\varepsilon}_{\text{Meßfehler}}.$$

*Die Meßfehler sind die Elementarereignisse. Ereignisse sind beispielsweise Intervalle.*

Begriff des Ereignisfeldes (grob): Ein Ereignisfeld  $\mathcal{E}$  ist ein System von Teilmengen der Menge  $\Omega$ . Es gilt:  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ .

**Bem.:** Es seien  $A_1 \in \mathcal{E}$  und  $A_2 \in \mathcal{E}$  Ereignisse. Dann ist:

- $A_3 := A_1 \cap A_2 = \{\omega \in \Omega: \omega \in A_1 \text{ und } \omega \in A_2\}$   
das Ereignis, bei dem  $A_1$  und  $A_2$  eintreten;
- $A_3 := A_1 \cup A_2 = \{\omega \in \Omega: \omega \in A_1 \text{ oder } \omega \in A_2\}$   
das Ereignis, bei dem  $A_1$  oder  $A_2$  eintreten;
- $\overline{A_1} = \Omega \setminus A_1 = \{\omega \in \Omega: \omega \notin A_1\}$  das zu  $A_1$  komplementäre Ereignis.

Es gilt offenbar:

- $A \cup \overline{A} = \Omega$  (sicheres Ereignis),
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$  (unmögliches Ereignis).

## Satz 1.1 (Rechenregeln für Ereignisse)

- (i)  $A \cup B = B \cup A$  (Kommutativgesetz)
- (ii)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  (Assoziativgesetz)
- (iii)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (Distributiv-)
- (iv)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  (gesetze)
- (v) (De'Morgansche Regeln)

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

**Def. 1.3** Seien  $A_1, \dots, A_n, \dots$  Ereignisse.

Die Vereinigung  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  ist das Ereignis, das eintritt, wenn mindestens eines Ereignisse  $A_1, \dots, A_n, \dots$  eintritt.

Der Durchschnitt  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  ist das Ereignis, das eintritt, wenn alle Ereignisse  $A_1, \dots, A_n, \dots$  eintreten.

## Satz 1.2 (Verallgemeinerungen)

Seien  $A, A_1, \dots$  Ereignisse.

$$\text{(iii)} \quad A \cap \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap A_i)$$

$$\text{(iv)} \quad A \cup \left( \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \cup A_i)$$

(v)

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$$
$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$$

### 1.3 Ereignisfelder

**Def. 1.4** Sei  $\Omega$  die Menge aller Elementarereignisse eines zufälligen Experiments, so heißt  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  Ereignisfeld ( $\sigma$ -Algebra) über  $\Omega$ , falls folgendes gilt:

1.  $\Omega \in \mathcal{E}$ ;

2. Gilt  $A_i \in \mathcal{E}$  für  $i \in \mathbf{N}$ , dann folgt  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$ ;

3.  $A \in \mathcal{E} \implies \bar{A} \in \mathcal{E}$ .

**Bem.:** 3 grundlegende Eigenschaften:

- Elementarereignisse schließen sich gegenseitig aus.
- Es tritt immer nur genau ein Elementarereignis ein.
- Ein Ereignis tritt genau dann ein, wenn eines seiner Elementarereignisse eintritt.

## Folg. 1

a) Ist  $A_i \in \mathcal{E} \quad \forall i \in \mathbf{N}$ , so folgt daraus:  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$ .

b) Für das unmögliche Ereignis gilt:  $\emptyset \in \mathcal{E}$ .

## Beweis:

a)

$$\begin{aligned} A_i \in \mathcal{E}, \quad \forall i \in \mathbf{N} &\implies \overline{A_i} \in \mathcal{E}, \quad \forall i \in \mathbf{N} \quad (\text{Def. 1.4.3}) \\ &\implies \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \in \mathcal{E} \quad (\text{Def. 1.4.2}) \\ &\implies \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \in \mathcal{E} \quad (\text{de Morgan'sche Regeln}) \\ &\implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E} \quad (\text{Def. 1.4.3}) \end{aligned}$$

b) Nach Def. 1.4.1 gilt:  $\Omega \in \mathcal{E}$ . Wegen  $\emptyset = \overline{\Omega}$  und Definition 1.4.3) folgt dann:  $\emptyset \in \mathcal{E}$ .

□

**Def. 1.5** Zwei Ereignisse  $A_1, A_2 \in \mathcal{E}$  heißen unvereinbar (disjunkt), falls  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  gilt. Wir sagen dann auch, diese beiden Ereignisse schließen einander aus.

## 1.4 Kolmogoroff'sches Axiomensystem

**Def. 1.6** Sei  $\mathcal{E}$  ein Ereignisfeld.

Eine Abbildung  $P: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$  heißt Wahrscheinlichkeit, falls sie die folgenden Eigenschaften hat:

1. Für alle  $A \in \mathcal{E}$  gilt:  $0 \leq P(A) \leq 1$ ;
2.  $P(\Omega) = 1$ ;
3. Sind die Ereignisse  $A_1, A_2, \dots$  paarweise unvereinbar (d.h.  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j, i, j \in \mathbb{N}$ ), so gilt die sogenannte  $\sigma$ -Additivitätseigenschaft:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

**Def. 1.7** Sei  $\Omega$  die Menge der Elementarereignisse,  $\mathcal{E}$  ein Ereignisfeld über  $\Omega$  ( $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ) und  $P$  genüge den KOLMOGOROFF-Axiomen, dann heißt das Tripel  $(\Omega, \mathcal{E}, P)$  Wahrscheinlichkeitsraum.

Mittels dieses Begriffes ist eine vollständige Beschreibung eines zufälligen Experimentes möglich.

Wir betrachten nun  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ , ein System von Teilmengen der Menge  $\Omega$ . Dann können wir die folgende Menge bilden:

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{E} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}, \mathcal{E} \text{ ist Ereignisfeld}\}.$$

Dann ist die Menge

$$\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = \bigcap_{\mathcal{E} \in \mathcal{E}(\mathcal{A})} \mathcal{E}$$

die von  $\mathcal{A}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra (Ereignisfeld) bzw. die kleinste  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$ , die  $\mathcal{A}$  enthält.

**Bsp. 1.4** *Beispiele für Wahrscheinlichkeitsräume*  $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ .

*1. Klassische Wahrscheinlichkeitsräume*

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega).$$

$$P(\omega_i) = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N} \quad \forall i = 1, \dots, N. \text{ D.h. alle}$$

*Elementarereignisse sind gleichwahrscheinlich.*

**Def. 1.8 (klassische Def. der Wkt.)** Sei  $A \in \mathcal{E}$ .

$$P(A) = \frac{\#\{\omega, \omega \in A\}}{N} = \frac{\#\text{für } A \text{ günstigen El. ereign.}}{\#\text{möglichen El. ereignisse}}$$

2. Es sei  $\Omega = \mathbb{R}$  und

$$\mathcal{A} = \{[a, b[ : -\infty < a < b < \infty\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega).$$

die Menge der halboffenen Intervalle. Dann ist  $\mathcal{B}^1 := \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  die  $\sigma$ -Algebra der BOREL-Mengen.  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, P)$  ist dann ein Wahrscheinlichkeitsraum mit irgendeiner Wahrscheinlichkeit  $P$ .

3. Es sei  $\Omega = [0, 1]$ . Weiterhin betrachten wir:

$$\mathcal{E} = \{A : A = B \cap [0, 1], B \in \mathcal{B}^1\}.$$

Für alle Mengen  $A \in \mathcal{E}$  definieren wir die Wahrscheinlichkeit:

$$(a) P : A \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } P(A) := \int_A dx.$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \int_0^1 dx = 1 \\ P\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]\right) &= \frac{1}{4} \\ P\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx = 0 \end{aligned}$$

(b)  $Q: A \longrightarrow \mathbb{R}$  mit  $Q(A) := \int_A 1,5(1 - x^2)dx$ .

*Dann ist:*

$$\begin{aligned} Q(\Omega) &= \int_0^1 1,5(1 - x^2)dx \\ &= 1,5 \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$(\Omega, \mathcal{E}, P)$  und  $(\Omega, \mathcal{E}, Q)$  sind Wahrscheinlichkeitsräume.