Inhaltsverzeichnis

Literatur

Mathar, R. und Pfeiffer, D. (1990) Stochastik für Informatiker, Stuttgart

Pflug, G. (1986). Stochastische Modelle in der Informatik, Stuttgart

Greiner, M. und Tinhofer, G. (1996) Stochastik für Studienanfänger der Informatik, München

Rosanov, J.A. (1970). Wahrscheinlichkeitstheorie, Berlin

Flachsmeyer, J. (1970). Kombinatorik, Berlin

Kapitel 1

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Contents

1 Grundbegriffe

1.1 Einleitung, Geschichte

- antikes Griechenland

  Begriff der Wkt.

  Naturgesetze drücken sich durch eine Vielzahl von zufälligen Erscheinungen aus.

  Stäbchenspiel

- 1654, Chevalier de Mere, Pascal

  Würfelspiele, Würfe mit 2 Würfeln. Wenn in 25 Würfen einmal eine Doppelsechs so hat C.d.M. gewonnen, sonst sein Gegner.

- Pascal, Fermat (Briefwechsel)

  2 Personen-Spiele. Gespielt wird eine Serie von Partien, z.B. Schach (nur 0,1). Gewinnen soll der Spieler, der zuerst S Partien gewonnen hat, d.h. dieser Spieler erhält den vollen Einsatz.

  Abbruch des Spiels (z.B. wegen Zeitmangel)

  A hat a Gewinnpartien, $a < S$

  B hat b Gewinnpartien, $b < S$

  Wie ist der Einsatz nach dem Abbruch gerecht zu verteilen?

  Variante: $\frac{a}{b}$, aber S wird nicht berücksichtigt!

  Es wäre also der weitere mögliche Verlauf nach dem Abbruch zu analysieren.

- 1662, Graunt; 1693 Halley

  Sterlichkeitstafeln (Überlebenswkt. in Abhängigkeit vom Lebensalter) $\rightarrow$ Rentenberechnung

  Schiffsversicherung

- 1713, Jacob Bernoulli

  "Ars conjectandi": 1. Lehrbuch der Wkt.rechnung

  Bernoulli-Gesetz der Großen Zahlen, $p = P(A)$

  $h_n(A) = \frac{1}{n}\#$ Auftreten v. A, $h_n(A) - p \rightarrow_{n\to\infty} 0$

- 1733, Moivre

  Grenzwertsatz von Moivre-Laplace

  $\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$

- 1812, Laplace

  klassische Definition der Wkt.

$$P(A) = \frac{\#\text{für A günstige Ereignisse}}{\#\text{mögliche Ereignisse}}$$

- 1800, Laplace, Gauss

  Untersuchung von Beobachtungsfehlern

  Kleinste Quadrat-Schätzung

- Ende 19. Jh., Tschebyscheff, Markov, Ljapunov

- 1900, David Hilbert (2. Intern.Mathematikerkongress Paris) 23 Probleme der Mathematik, u.a. Axiomatik der Wkt.rechnung.

- 1919 R.v. Mises

  statistische Definition der Wkt,

  Erfahrung: $P(A) := \lim_{n\to\infty} h_n(A)$

  Existiert der Grenzwert?

- 1933, A.N. Kolmogorov

  Axiomsystem der Wkt.rechnung

Statistik:

Gesamtheit aller Methoden zur Analyse zufallsbehafteter Datenmengen

$\rightarrow$ Aussagen über die zugrundeliegende Grundgesamtheit treffen.

\+ Wahrscheinlichkeitsrechnung:

gegebene Grundgesamtheit (Verteilung)

$\rightarrow$ Aussagen über Realisierungen einer Zufallsvariablen treffen.

= Stochastik

(grch.: im Rechnen geschickt).

1.2 Zufällige Ereignisse

Def. 1.1 *Ein zufälliger Versuch (Experiment) ist ein Versuch mit ungewissem Ausgang.*

Beispiel: Glücksspiele.

Wichtig bei solchen Experimenten ist:

- die Beschreibung des Experiments (Kartenspiele, Münzwurf),
- die Erfassung der Menge aller möglichen Ausgänge des Experiments.

Def. 1.2 (Grundbegriffe)

- *Elementarereignis: möglicher Versuchsausgang,*
  Bez.: ω.
- *Ereignis: Menge von El.ereignissen,* $A \subset \Omega$
- *sicheres Ereignis: Menge aller El.ereignisse,*
  Bez*:* Ω.
- *unmögiches Ereignis:* $\emptyset$.
- *Komplementärereignis:* $\overline{A} = \Omega \setminus A$

Ein Experiment kann diskret sein, d.h. endlich oder abzählbar viele Ausgänge besitzen, oder es kann überabzählbar viele Ausgänge haben.

Bsp. 1.1 *:* **Experimente mit einer endlichen Anzahl von Elementarereignissen**

a) Münzwurf

Folgende Ereignisse können auftreten:

- *zwei Elementarereignisse:* $\{\text{Zahl }(z)\}$, $\{\text{Wappen }(w)\}$*;*
- *das unmögliche Ereignis* $\emptyset = \{z\} \cap \{w\}$*;*
- *das sichere Ereignis* $\Omega := \{z, w\}$*. Das bedeutet, daß Zahl oder Wappen eintreten.*

Die Menge der auftretenden Ereignisse ist

$$\mathcal{P}(\Omega) := \{\emptyset, \{z\}, \{w\}, \Omega\},$$

die Potenzmenge von Ω*.*

b) Würfeln (1 mal)

Die Elementarereignisse sind $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ *und* $\{6\}$*, d.h.* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Damit erhalten wir für paarweise verschiedene $i, j, k, l, m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *die möglichen Ereig-*

nisse :

Ereignistyp	Anzahl
$\emptyset$	1
$\{i\}$	6
$\{i,j\}$	15
$\{i,j,k\}$	20
$\{i,j,k,l\}$	15
$\{i,j,k,l,m\}$	6
Ω	1
insgesamt	$2^6 = 64$

Menge der auftretenden Ereignisse ist die Potenzmenge von Ω*.*

Bsp. 1.2 *:* **Experimente mit abzählbar vielen Elementarereignissen)**

1. *Werfen einer Münze, bis zum ersten Mal die Zahl fällt*

$$\Omega = \{z, wz, wwz, wwz, wwwz, \ldots\}.$$

2. *Anzahl der ankommenden Fahrzeuge an einer Kreuzung in einem bestimmten Zeitbereich*

$$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Bsp. 1.3 *:* **Experimente mit überabzählbar vielen Elementarereignissen**

1. *Lebensdauer einer Glühbirne*

$$\Omega = [0, \infty[= \mathbb{R}^+.$$

   Ereignisse sind bei diesem Experiment z.B. Intervalle und Punkte.

   Es gilt beispielsweise: $\emptyset = [0,1] \cap [3,5]$.

   Das Ereignis $A = \{[0.4, 3.1], \{7\}\}$ *bedeutet, daß die Glühbirne eine Lebensdauer von* $7s$ *oder eine Lebensdauer zwischen* $0.4s$ *und* $3.1s$ *hat.*

2. *Messung einer physikalischen Konstante*

$$\underbrace{y}_{\text{Meßwert}} = \underbrace{m}_{\text{Konstante}} + \underbrace{\varepsilon}_{\text{Meßfehler}} .$$

   Die Meßfehler sind die Elementarereignisse. Ereignisse sind beispielsweise Intervalle.

Begriff des Ereignisfeldes (grob): Ein Ereignisfeld $\mathcal{E}$ ist ein System von Teilmengen der Menge Ω. Es gilt: $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

Bem.: Es seien $A_1 \in \mathcal{E}$ und $A_2 \in \mathcal{E}$ Ereignisse. Dann ist:

- $A_3 := A_1 \cap A_2 = \{\omega \in \Omega \colon \omega \in A_1 \text{ und } \omega \in A_2\}$ das Ereignis, bei dem A_1 <u>und</u> A_2 eintreten;
- $A_3 := A_1 \cup A_2 = \{\omega \in \Omega \colon \omega \in A_1 \text{ oder } \omega \in A_2\}$ das Ereignis, bei dem A_1 <u>oder</u> A_2 eintreten;
- $\overline{A_1} = \Omega \setminus A_1 = \{\omega \in \Omega \colon \omega \notin A_1\}$ das zu A_1 komplementäre Ereignis.

Es gilt offenbar:

- $A \cup \overline{A} = \Omega$ (sicheres Ereignis),
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$ (unmögliches Ereignis).

Satz 1.1 (Rechenregeln für Ereignisse)

(i) $A \cup B = B \cup A$ *(Kommutativgesetz)*

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(Assoziativgesetz)*

(iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(Distributiv-)*

(iv) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(gesetze)*

(v) *(De'Morgansche Regeln)*

$$\begin{aligned} \overline{(A \cup B)} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{(A \cap B)} &= \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

Def. 1.3 *Seien* $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ *Ereignisse.*
Die *Vereinigung* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *ist das Ereignis, das eintritt, wenn mindestens eines Ereignisse* $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ *eintritt.*
Der *Durchschnitt* $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ *ist das Ereignis, das eintritt, wenn alle Ereignisse* $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ *eintreten.*

Satz 1.2 (Verallgemeinerungen)

Seien $A, A_1, \ldots$ *Ereignisse.*

(iii) $A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap A_i)$

(iv) $A \cup (\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty}(A \cup A_i)$

(v)

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$$

1.3 Ereignisfelder

Def. 1.4 *Sei Ω die Menge aller Elementarereignisse eines zufälligen Experiments, so heißt $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ Ereignisfeld (σ–Algebra) über Ω, falls folgendes gilt:*

1. $\Omega \in \mathcal{E}$;
2. *Gilt* $A_i \in \mathcal{E}$ *für* $i \in \mathbf{N}$, *dann folgt* $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$;
3. $A \in \mathcal{E} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{E}$.

Bem.: 3 grundlegende Eigenschaften:

- Elementarereignisse schließen sich gegenseitig aus.
- Es tritt immer nur genau ein Elementarereignis ein.
- Ein Ereignis tritt genau dann ein, wenn eines seiner Elementarereignisse eintritt.

Folg. 1

a) Ist $A_i \in \mathcal{E} \quad \forall i \in \mathbf{N}$*, so folgt daraus:* $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$.

b) Für das unmögliche Ereignis gilt: $\emptyset \in \mathcal{E}$.

Beweis:

a)

$$\begin{aligned} A_i \in \mathcal{E},\ \forall i \in \mathbf{N} &\Longrightarrow \overline{A_i} \in \mathcal{E},\ \forall i \in \mathbf{N} \ \text{ (Def. 1.4.3)} \\ &\Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \in \mathcal{E} \ \text{ (Def. 1.4.2)} \\ &\Longrightarrow \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \in \mathcal{E} \ \text{ (de Morgan'sche Regeln)} \\ &\Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E} \ \text{ (Def. 1.4.3)} \end{aligned}$$

b) Nach Def. 1.4.1 gilt: $\Omega \in \mathcal{E}$. Wegen $\emptyset = \overline{\Omega}$ und Definition 1.4 3) folgt dann: $\emptyset \in \mathcal{E}$.

$\square$

Def. 1.5 *Zwei Ereignisse* $A_1, A_2 \in \mathcal{E}$ *heißen* *unvereinbar* (*disjunkt*), *falls* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ *gilt. Wir sagen dann auch, diese beiden Ereignisse schließen einander aus.*

1.4 Kolmogoroff'sches Axiomensystem

Def. 1.6 *Sei $\mathcal{E}$ ein Ereignisfeld.*
Eine Abbildung $P\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Wahrscheinlichkeit, falls sie die folgenden Eigenschaften hat:

1. *Für alle $A \in \mathcal{E}$ gilt: $0 \leq P(A) \leq 1$;*
2. *$P(\Omega) = 1$;*
3. *Sind die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ paarweise unvereinbar (d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j, i, j \in \mathbb{N}$), so gilt die sogenannte σ–Additivitätseigenschaft:*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Def. 1.7 *Sei Ω die Menge der Elementarereignisse, $\mathcal{E}$ ein Ereignisfeld über Ω ($\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$) und P genüge den* KOLMOGOROFF*–Axiomen, dann heißt das Tripel $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum.*

Mittels dieses Begriffes ist eine vollständige Beschreibung eines zufälligen Experimentes möglich.

Wir betrachten nun $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, ein System von Teilmengen der Menge Ω. Dann können wir die folgende Menge bilden:

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{E} \colon \mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}, \mathcal{E} \text{ ist Ereignisfeld}\}\,.$$

Dann ist die Menge

$$\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = \bigcap_{\mathcal{E} \in \mathcal{E}(\mathcal{A})} \mathcal{E}$$

die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ–Algebra (Ereignisfeld) bzw. die kleinste σ–Algebra über Ω, die $\mathcal{A}$ enthält.

Bsp. 1.4 *Beispiele für Wahrscheinlichkeitsräume* $(\Omega, \mathcal{E}, P)$.

1. *Klassische Wahrscheinlichkeitsräume*
   $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$.
   $P(\omega_)i = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N} \quad \forall i = 1, \ldots, N$. *D.h. alle Elementarereignisse sind gleichwahrscheinlich.*

Def. 1.8 (klassische Def. der Wkt.) *Sei* $A \in \mathcal{E}$.

$$P(A) = \frac{\#\{\omega, \omega \in A\}}{N} = \frac{\# f\ddot{u}r A \text{ günstigen El. ereign.}}{\#\text{möglichen El.ereignisse}}$$

2. *Es sei* $\Omega = \mathbb{R}$ *und*

$$\mathcal{A} = \{[a, b[\colon -\infty < a < b < \infty\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega).$$

die Menge der halboffenen Intervalle. Dann ist $\mathcal{B}^1 := \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ *die* σ*-Algebra der* BOREL*–Mengen.* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, P)$ *ist dann ein Wahrscheinlichkeitsraum mit irgendeiner Wahrscheinlichkeit* P*.*

3. *Es sei* $\Omega = [0, 1]$*. Weiterhin betrachten wir:*

$$\mathcal{E} = \{A\colon A = B \cap [0, 1], B \in \mathcal{B}^1\}.$$

Für alle Mengen $A \in \mathcal{E}$ *definieren wir die Wahrscheinlichkeit:*

(a) $P\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit* $P(A) := \int\limits_A dx$*.*

Dann ist:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \int_0^1 dx = 1 \\ P\left(\left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right]\right) &= \tfrac{1}{4} \\ P\left(\left\{\tfrac{1}{2}\right\}\right) &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx = 0 \end{aligned}$$

(b) $Q\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit* $Q(A) := \int\limits_A 1,5(1-x^2)dx$.

Dann ist:

$$\begin{aligned} Q(\Omega) &= \int_0^1 1,5(1-x^2)dx \\ &= 1,5\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$(\Omega, \mathcal{E}, P)$ *und* $(\Omega, \mathcal{E}, Q)$ *sind Wahrscheinlichkeitsräume.*