Übungen zur Komplexitätstheorie Wintersemester 06/07

Johannes Köbler

Übungsblatt 3

Aufgabe 8 (schriftlich, 10 Punkte)

Sei M eine 1-DTM, die die Sprache der Palindrome (siehe Aufgabe 4) entscheidet. Wir möchten zeigen, dass M hierzu Zeit $\Omega(n^2)$ benötigt. Erreicht M bei Eingabe x eine Konfiguration (q, u, av) und führt diese in die Konfiguration (q', u', v') über, so heißt das Paar (q, a) eine **Überquerung** der i-ten Feldgrenze, $i \geq 1$, falls

- $|u| = i - 1$ und $|u'| = i$ oder
- $|u| = i$ und $|u'| = i - 1$

gilt. Die Folge $S_i(M, x) = (q_1, a_1), \ldots, (q_m, a_m)$ aller von $M(x)$ der Reihe nach ausgeführten i-Überquerungen heißt **Überquerungsfolge** (engl. crossing-sequence) der i-ten Feldgrenze. Für $y \in \Sigma^n$ sei $t(y)$ der Zeitverbrauch $time_M(y0^ny^R)$ von M bei Eingabe des Palindroms $x = y0^ny^R$. Zeigen Sie:

a) Es gibt eine Zahl i, $n \leq i \leq 2n$, so dass $S_i(M, x)$ die Länge $m \leq \frac{t(y)}{n}$ hat.

b) Das Wort y ist eindeutig durch Angabe von M, $S_i(M, x)$, n und i beschreibbar.

c) $K(y) \in O(\frac{t(y)}{|y|} + \log |y|)$.

d) M benötigt Zeit $\Omega(n^2)$.

Aufgabe 9

Zeigen Sie, dass die Komplexitätsklassen P und NP abgeschlossen sind unter Vereinigung, Schnitt und dem Kleene-Stern. Der **Kleene-Stern** einer Sprache L ist definiert durch

$$L^* = \{x_1 \ldots x_k \mid k \geq 0 \text{ und } x_1, \ldots, x_k \in L\}.$$

Aufgabe 10

Zeigen Sie: Jede $t(n)$-zeitbeschränkte k-DTM M kann von einer 1-DTM M' in Zeit $O(t(n)^2)$ simuliert werden. Lässt sich die Simulation bei Verwendung einer 2-DTM M' noch effizienter gestalten?

Aufgabe 11

Zeigen Sie, dass $n \mapsto k$, $n \mapsto \lceil \log n \rceil$, $n \mapsto \lceil \log^k n \rceil$, $n \mapsto \lceil n \cdot \log n \rceil$, $n \mapsto n^k + k$, $n \mapsto 2^n$ und $n \mapsto n! \cdot \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ für jede Konstante $k \in \mathbb{N}$ echte Komplexitätsfunktionen sind.