

Einführung in die Kryptologie

Johannes Köbler



Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

SS 2022

Produktchiffren

- Produktchiffren erhält man durch die sequentielle Anwendung mehrerer Verschlüsselungsverfahren
- Sie können extrem schwer zu brechen sein, auch wenn die einzelnen Komponenten leicht zu brechen sind

Definition

- Seien $KS_i = (M_i, C_i, E_i, D_i, K_i, \mathcal{S}_i)$, $i \in \{1, 2\}$, Kryptosysteme mit $C_1 = M_2$
- Dann ist das **Produktkryptosystem** $KS_1 \times KS_2$ von KS_1 und KS_2 definiert als $(M_1, C_2, E, D, K_1 \times K_2, \mathcal{S})$ mit $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$ und

$$E(k_1, k_2; x) = E_2(k_2, E_1(k_1, x)) \text{ sowie } D(k_1, k_2; y) = D_1(k_1, D_2(k_2, y))$$

für alle $x \in M_1$, $y \in C_2$ und $(k_1, k_2) \in K_1 \times K_2$
- Der Schlüsselraum von $KS_1 \times KS_2$ umfasst also alle Schlüsselpaare $(k_1, k_2) \in K_1 \times K_2$, wobei wir voraussetzen, dass die beiden Schlüssel unabhängig gewählt werden (d.h. es gilt $p(k_1, k_2) = p(k_1)p(k_2)$)

Produktchiffren

Beispiel

- Bilden wir das Produkt $KS = KS^* \times KS^+$ der
 - multiplikativen Chiffre $KS^* = (M, C, \mathbb{Z}_m^*, E^*, D^*)$ mit $M = C = \mathcal{A} = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$ und der
 - additiven Chiffre $KS^+ = (M, C, \mathbb{Z}_m, E^+, D^+)$,

so gilt für jeden Schlüssel $(k_1, k_2) \in K = \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_m$:

$$E(k_1, k_2; x) = E^+(k_2, E^*(k_1, x)) = k_1 x + k_2$$

- Dies bedeutet, dass das Produkt $KS^* \times KS^+ = (M, C, K, E, D)$ der multiplikativen und additiven Chiffre die affine Chiffre ist
- Welche Chiffre erhalten wir, wenn wir das Produkt $KS^+ \times KS^*$ der additiven und der multiplikativen Chiffre bilden?

Produktchiffren

Beispiel (Fortsetzung)

- Das Produkt $KS^+ \times KS^*$ ist das Kryptosystem $KS' = (M, C, K', E', D')$, in dem für jeden Schlüssel $(k_2, k_1) \in K' = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m^*$ gilt:

$$E'(k_2, k_1; x) = k_1(x + k_2) = k_1x + k_1k_2 = E(k_1, k_1k_2; x)$$

- Die Abbildung $(k_2, k_1) \mapsto (k_1, k_1k_2)$ ist also eine Bijektion zwischen den Schlüsselräumen $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m^*$ und $\mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_m$, die jeden Schlüssel $(k_2, k_1) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m^*$ auf einen Schlüssel $(k_1, k_1k_2) \in \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_m$ mit $E_{(k_1, k_1k_2)} = E'_{(k_2, k_1)}$ abbildet
- Somit können wir auch jeden Schlüsselgenerator \mathcal{S} für $KS^* \times KS^+$ in einen Generator \mathcal{S}' für $KS^+ \times KS^*$ transformieren (und \mathcal{S}' auch wieder zurück in \mathcal{S}), so dass \mathcal{S}' in $KS^+ \times KS^*$ jede Chiffrierfunktion mit der gleichen Wahrscheinlichkeit erzeugt wie \mathcal{S} in $KS^* \times KS^+$
- Daher können die beiden Kryptosysteme $KS^* \times KS^+$ und $KS^+ \times KS^*$ als gleich (oder besser äquivalent, siehe Übungen) angesehen werden, d.h. die beiden Kryptosysteme KS^* und KS^+ kommutieren



Produktchiffren

Definition

- Ein Kryptosystem $KS = (M, C, K, D, E)$ mit $M = C$ heißt **endomorph**
- Ein endomorphes Kryptosystem KS heißt **idempotent**, falls $KS \times KS$ äquivalent zu KS ist (in Zeichen: $KS \times KS = KS$)

Beispiel

- Eine leichte Rechnung zeigt, dass
 - die additive Chiffre,
 - die multiplikative Chiffre und
 - die affine Chiffreidempotent sind
- Dies trifft auch auf
 - die Blocktransposition sowie
 - die Vigenère- und Hill-Chiffrezu (siehe Übungen)



Produktchiffren

- Will man durch mehrmalige Anwendung (Iteration) derselben Chiffre eine höhere Sicherheit erreichen, so darf diese nicht idempotent sein
- Man kann versuchen, durch sequentielle Ausführung zweier idempotenter Systeme KS_1 und KS_2 ein System $KS = KS_1 \times KS_2$ zu erhalten, das nicht idempotent ist
- Da KS im Fall $KS_1 \times KS_2 = KS_2 \times KS_1$ wegen

$$\begin{aligned} KS \times KS &= (KS_1 \times KS_2) \times (KS_1 \times KS_2) \\ &= KS_1 \times (KS_2 \times KS_1) \times KS_2 \\ &= KS_1 \times (KS_1 \times KS_2) \times KS_2 \\ &= (KS_1 \times KS_1) \times (KS_2 \times KS_2) \\ &= KS_1 \times KS_2 \\ &= KS \end{aligned}$$

idempotent ist, dürfen hierbei KS_1 und KS_2 jedoch nicht kommutieren

Iterierte Blockchiffren

- Im Folgenden betrachten wir Blockchiffren über dem Binäralphabet $A = \{0, 1\}$ und auch der Schlüsselraum wird von der Form $\{0, 1\}^k$ sein
- Die Schlüssellänge bezeichnen wir bis auf weiteres mit k und einzelne Schlüssel eines Kryptosystems mit K
- Eine **iterierte Blockchiffre** wird durch eine **Rundenfunktion (round function)** g und einen **Key-Schedule Algorithmus** f beschrieben
- Ist N die Rundenzahl, so erzeugt f bei Eingabe eines Schlüssels K eine Folge $f(K) = (K^1, \dots, K^N)$ von N **Rundenschlüsseln** K^i für g

Iterierte Blockchiffren

- Mit diesen wird ein Klartext $x = w^0$ durch N -malige Anwendung der Rundenfunktion g zu einem Kryptotext $y = w^N$ verschlüsselt:

$$w^1 := g(K^1, w^0)$$

⋮

$$w^N := g(K^N, w^{N-1})$$

- Um y wieder zu entschlüsseln, muss die inverse Rundenfunktion g^{-1} mit umgekehrter Rundenschlüsselfolge K^N, \dots, K^1 benutzt werden:

$$w^{N-1} := g^{-1}(K^N, w^N)$$

⋮

$$w^0 := g^{-1}(K^1, w^1)$$

- Beispiele für iterierte Chiffren sind der aus 16 Runden bestehende **DES**-Algorithmus und der **AES** mit einer variablen Rundenzahl $N \in \{10, 12, 14\}$, die wir später behandeln werden

Substitutions-Permutations-Netzwerke

- Als Basisbausteine für die Rundenfunktion von iterierten Blockchiffren eignen sich Substitutionen und Transpositionen besonders gut
- Aus Effizienzgründen sollten die Substitutionen nur eine relativ kleine Blocklänge ℓ haben

Definition

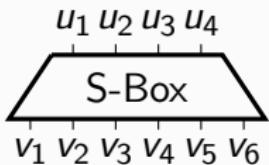
- Für ein Wort $u = u_1 \cdots u_n \in \{0, 1\}^n$ und Indizes $1 \leq i \leq j \leq n$ bezeichne $u[i, j]$ das **Teilwort** $u_i \cdots u_j$ von u
- Im Fall $n = ml$ bezeichnen wir das Teilwort $u[(i - 1)l + 1, il]$ auch einfach mit $u_{(i)}$, d.h. es gilt $u = u_{(1)} \cdots u_{(m)}$, wobei $|u_{(i)}| = l$ ist

Substitutions-Permutations-Netzwerke

- Sei $\sigma_S : \{0, 1\}^I \rightarrow \{0, 1\}^{I'}$ eine Substitution, die Binärblöcke u der Länge I in Blöcke $v = \sigma_S(u)$ der Länge I' überführt (auch **S-Box** S genannt)
- Für $\sigma_S(u)$ schreiben wir auch einfach $S(u)$
- Durch parallele Anwendung von m Kopien der S-Box S erhalten wir die Substitution $\sigma_{mS} : \{0, 1\}^{mI} \rightarrow \{0, 1\}^{mI'}$ mit

$$\sigma_{mS}(u_1 \cdots u_{mI}) = \sigma_S(u_{(1)}) \cdots \sigma_S(u_{(m)})$$

- Auch hier schreiben wir für $\sigma_{mS}(u_1 \cdots u_{mI})$ auch einfach $S(u_1 \cdots u_{mI})$
- Für die Speicherung einer S-Box S mit $\sigma_S : \{0, 1\}^I \rightarrow \{0, 1\}^{I'}$ auf einem Chip werden $I' \cdot 2^I$ Bit Speicherplatz benötigt (im Fall $I = I'$ also $I/2^I$ Bit)
- Für $I = I' = 16$ wären dies beispielsweise 2^{20} Bit, was Smartcard-Anwendungen bereits ausschließen würde
- Für eine Transposition P auf $\{0, 1\}^\ell$ bezeichnen wir die zugehörige Permutation auf $[\ell]$ mit π_P oder einfach mit π , falls P aus dem Kontext bekannt ist, d.h. $P(u_1 \cdots u_\ell) = u_{\pi(1)} \cdots u_{\pi(\ell)}$



Substitutions-Permutations-Netzwerke

Definition

- Für natürliche Zahlen $m, l \geq 1$ sei $M = C = \{0, 1\}^\ell$ mit $\ell = ml$
- Ein Substitutions-Permutations-Netzwerk (SPN) wird durch eine S-Box S , eine Blocktransposition P mit Blocklänge $\ell = ml$ und durch eine Funktion $f : \{0, 1\}^k \rightarrow \{0, 1\}^{\ell(N+1)}$ beschrieben
- Hierbei realisiert die S-Box S eine Permutation σ_S auf $\{0, 1\}^l$ und N ist die Rundenzahl des SPN
- Die Funktion f transformiert einen (externen) Schlüssel $K \in \{0, 1\}^k$ in ein Key-Schedule $f(K) = (K^1, \dots, K^{N+1})$ von $N + 1$ Rundenschlüsseln
- Unter ihnen wird ein Klartext $x \in \{0, 1\}^\ell$ durch folgenden Chiffrieralgorithmus in einen Kryptotext $y = E_{f, S, P}(K, x) \in \{0, 1\}^\ell$ überführt:

```

1    $w^0 := x$ 
2   for  $r := 1$  to  $N - 1$  do
3        $u^r := w^{r-1} \oplus K^r$ 
4        $v^r := \sigma_{mS}(u^r)$ 

```

```

5    $w^r := P(v^r)$ 
6    $u^N := w^{N-1} \oplus K^N$ 
7    $v^N := \sigma_{mS}(u^N)$ 
8    $y := v^N \oplus K^{N+1}$ 

```

Substitutions-Permutations-Netzwerke

Die Chiffrierfunktion $E_{f,S,P}(K, x)$

- Zu Beginn jeder Runde $r \in \{1, \dots, N\}$ wird w^{r-1} zuerst einer XOR-Operation mit dem Rundenschlüssel K^r unterworfen (**round key mixing**) und das Resultat u^r den S-Boxen zugeführt
- Auf die Ausgabe v^r der S-Boxen wird in jeder Runde $r \leq N-1$ die Transposition P angewendet, was die Eingabe w^r für die nächste Runde $r+1$ liefert
- Am Ende der letzten Runde $r = N$ wird nicht die Transposition P angewandt, sondern der Rundenschlüssel K^{N+1} auf v^N addiert
- Dies wird **whitening** genannt und bewirkt, dass auch für den letzten Chiffrierschritt der Schlüssel benötigt und somit der Gegner an einer partiellen Entschlüsselung des Kryptotexts gehindert wird
- Zudem wird dadurch eine (legale) Entschlüsselung nach fast demselben Verfahren ermöglicht (siehe Übungen)

```

1    $w^0 := x$ 
2   for  $r := 1$  to  $N - 1$  do
3        $u^r := w^{r-1} \oplus K^r$ 
4        $v^r := S(u^r)$ 
5        $w^r := P(v^r)$ 
6    $u^N := w^{N-1} \oplus K^N$ 
7    $v^N := S(u^N)$ 
8    $y := v^N \oplus K^{N+1}$ 

```

Substitutions-Permutations-Netzwerke

- Die S-Boxen sorgen dafür, dass jedes einzelne Bit des Kryptotextes y von mehreren Bits des Klartextes und des Schlüssels abhängt
- Wichtig ist hierbei, dass die Abhängigkeit möglichst komplex ist (also z.B. nicht linear)
- Dadurch werden Angriffe erschwert, die versuchen, Rückschlüsse vom Kryptotext auf den Schlüssel oder Klartext zu ziehen
(Shannon nannte diese Eigenschaft **Konfusion**)
- Die Transpositionen über den gesamten Block sorgen dafür, dass sich eine Änderung von einzelnen Bits des Klartextes oder des Schlüssels potentiell auf jedes Kryptotextbit auswirken kann
(von Shannon als **Diffusion** bezeichnet)
- Idealerweise wird hierdurch erreicht, dass sich bei Änderung eines einzelnen Eingabe- oder Schlüsselbits jedes Ausgabebit mit Wahrscheinlichkeit 1/2 ändert

Substitutions-Permutations-Netzwerke

Beispiel

- Wir betrachten ein SPN SP mit Parametern $I = m = N = 4$ und $k = 32$
- Für f wählen wir die Funktion $f(K) = (K^1, \dots, K^5)$ mit
 $K^r = K[4(r - 1) + 1, 4(r - 1) + 16]$
- Weiter seien $\sigma_S : \{0, 1\}^4 \rightarrow \{0, 1\}^4$ und $\sigma_P : \{1, \dots, 16\} \rightarrow \{1, \dots, 16\}$
die folgenden Permutationen:

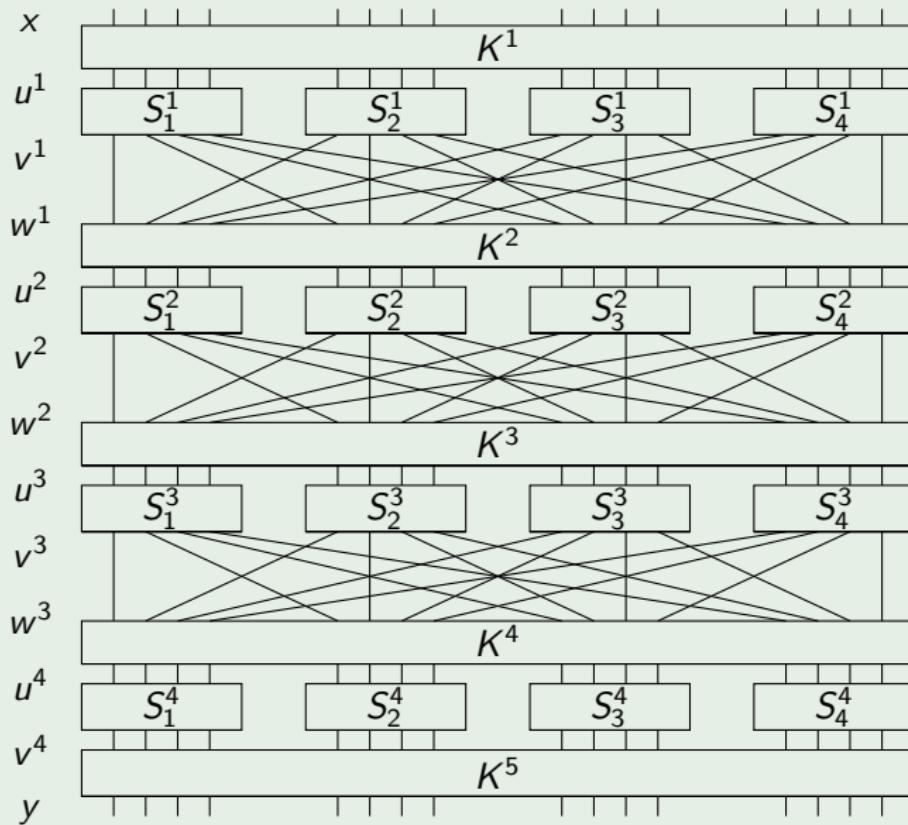
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
$\sigma_S(z)$	E	4	D	1	2	F	B	8	3	A	6	C	5	9	0	7

wobei die Argumente und Werte von σ_S hexadezimal dargestellt sind,
und

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\sigma_P(i)$	1	5	9	13	2	6	10	14	3	7	11	15	4	8	12	16

Substitutions-Permutations-Netzwerke

Beispiel (Fortsetzung)



Substitutions-Permutations-Netzwerke

Beispiel (Schluss)

- Beispielsweise liefert f für den Schlüssel $K = 0011\ 1010\ 1001\ 0100\ 1101\ 0110\ 0011\ 1111$ die Rundenschlüssel $f(K) = (K^1, \dots, K^5)$ mit

$$\begin{array}{ll} K^1 = 0011\ 1010\ 1001\ 0100 & K^2 = 1010\ 1001\ 0100\ 1101 \\ K^3 = 1001\ 0100\ 1101\ 0110 & K^4 = 0100\ 1101\ 0110\ 0011 \\ K^5 = 1101\ 0110\ 0011\ 1111 & \end{array}$$

unter denen der Klartext $x = 0010\ 0110\ 1011\ 0111$ die folgenden Chiffrierschritte durchläuft:

$$\begin{aligned} x &= 0010\ 0110\ 1011\ 0111 = w^0 \\ w^0 \oplus K^1 &= 0001\ 1100\ 0010\ 0011 = u^1 \\ S(u^1) &= 0100\ 0101\ 1101\ 0001 = v^1 \\ P(v^1) &= 0010\ 1110\ 0000\ 0111 = w^1 \\ &\vdots \\ P(v^3) &= 1110\ 0100\ 0110\ 1110 = w^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^3 \oplus K^4 &= 1010\ 1001\ 0000\ 1101 = u^4 \\ S(u^4) &= 0110\ 1010\ 1110\ 1001 = v^4 \\ u^4 \oplus K^5 &= 1011\ 1100\ 1101\ 0110 = y \end{aligned}$$



Lineare Approximationen

- Sei $f : \{0,1\}^I \rightarrow \{0,1\}^{I'}$ eine boolesche Funktion
- Wählen wir die Eingabe $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cdots \mathcal{U}_{I'}$ zufällig unter Gleichverteilung, so gilt für die zugehörige Ausgabe $\mathcal{V} = f(\mathcal{U}) = \mathcal{V}_1 \cdots \mathcal{V}_{I'}$ sowie für alle $u \in \{0,1\}^I$ und $v \in \{0,1\}^{I'}:$

$$\Pr[\mathcal{V} = v \mid \mathcal{U} = u] = \begin{cases} 1 & f(u) = v \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Wegen $\Pr[\mathcal{U} = u] = 2^{-I}$ folgt

$$\Pr[\mathcal{V} = v, \mathcal{U} = u] = \begin{cases} 2^{-I} & f(u) = v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Die Funktion f ist **linear**, wenn eine binäre $(I \times I')$ -Matrix A mit $f(u) = uA$ existiert
- In diesem Fall ist jedes Ausgabebit v_j in der Form $v_j = u_{i_1} \oplus \cdots \oplus u_{i_k}$ mit $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq I$ darstellbar, d.h. $\Pr[\mathcal{V}_j = \mathcal{U}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_{i_k}] = 1$

Lineare Approximationen

- Für eine lineare Kryptoanalyse benötigen wir Gleichungen der Form

$$\mathcal{V}_{j_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_{j_{k'}} = \mathcal{U}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_{i_k} \oplus c$$

mit $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq I$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_{k'} \leq I'$ und $c \in \{0, 1\}$, die mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit gelten

- Definieren wir für $u, a \in \{0, 1\}^I$ und $v, b \in \{0, 1\}^{I'}$ die Teilsummen

$$u_a = \bigoplus_{i=1}^I a_i u_i \quad \text{und} \quad v_b = \bigoplus_{i=1}^{I'} b_i v_i,$$

so suchen wir also nach Werten für a , b und c , für die das Ereignis $\mathcal{V}_b = \mathcal{U}_a \oplus c$ (oder $\mathcal{U}_a \oplus \mathcal{V}_b = c$) mit großer Wahrscheinlichkeit eintritt

- In diesem Fall lässt sich nämlich der Wert von \mathcal{V}_b bei Kenntnis von \mathcal{U}_a entsprechend gut vorhersagen
- Wegen $\Pr[\mathcal{U}_a \oplus \mathcal{V}_b = c] = 1 - \Pr[\mathcal{U}_a \oplus \mathcal{V}_b = c \oplus 1]$ kommt es nur darauf an, wie stark die Wahrscheinlichkeit $\Pr[\mathcal{U}_a \oplus \mathcal{V}_b = 0]$ von $1/2$ abweicht
- \mathcal{V}_b lässt sich also in Abhängigkeit von \mathcal{U}_a um so besser vorhersagen, je größer der Absolutbetrag $|\Pr[\mathcal{U}_a \oplus \mathcal{V}_b = 0] - 1/2|$ ist

Güte einer linearen Approximation an eine S-Box

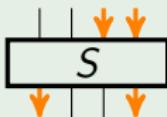
Definition

- Der **Bias** einer Zufallsvariablen \mathcal{X} mit Wertebereich $W(\mathcal{X}) = \{0, 1\}$ ist definiert als $\varepsilon(\mathcal{X}) = \Pr[\mathcal{X} = 0] - 1/2$
- Sei $f : \{0, 1\}^l \rightarrow \{0, 1\}^m$ eine boolesche Funktion
- Eine **lineare Approximation** an f wird durch ein Paar $(a, b) \in \{0, 1\}^l \times \{0, 1\}^m$ beschrieben
- Die **Güte** der durch (a, b) beschriebenen Approximation an f ist der doppelte Absolutbetrag $\gamma_f(a, b) = 2|\varepsilon(\mathcal{U}_a \oplus \mathcal{V}_b)|$ des Bias-Wertes von $\mathcal{U}_a \oplus \mathcal{V}_b$, wobei \mathcal{U} auf $\{0, 1\}^l$ gleichverteilt und $\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$ ist

Lineare Approximationen

Beispiel

- Wir betrachten die durch das Paar $(0011, 1001)$ beschriebene lineare Approximation $\mathcal{A} = \mathcal{U}_3 \oplus \mathcal{U}_4 \oplus \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_4$ an die S-Box S aus vorigem Beispiel
 - Dann nimmt die Zufallsvariable $(\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_4, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_4, \mathcal{A})$ die 16 Werte in folgender Tabelle jeweils mit Wahrscheinlichkeit $2^{-4} = 1/16$ an:



Lineare Approximationen

Beispiel (Fortsetzung)

- Um $\varepsilon(\mathcal{U}_a \oplus \mathcal{V}_b)$ zu berechnen, genügt es, die Anzahl $L(a, b)$ der Eingaben $u \in \{0, 1\}^I$ zu bestimmen, für die $f(u)_b = u_a$ ist
- Dann gilt $\Pr[\mathcal{U}_a \oplus \mathcal{V}_b = 0] = \Pr[\mathcal{U}_a = \mathcal{V}_b] = L(a, b)/16$ und somit

$$\varepsilon(\mathcal{U}_a \oplus \mathcal{V}_b) = L(a, b)/16 - 1/2 = (L(a, b) - 8)/16$$

sowie

$$\gamma(a, b) = |2\varepsilon(\mathcal{U}_a \oplus \mathcal{V}_b)|$$

- Für $a = 0011$ und $b = 1001$ gibt es z.B. $L(0011, 1001) = 2$ Eingaben u mit $u_{0011} = S(u)_{1001}$ ($u = 0100$ und $u = 1001$), d.h. es gilt

$$\varepsilon(\mathcal{U}_{0011} \oplus \mathcal{V}_{1001}) = (L(3, 9) - 8)/16 = (2 - 8)/16 = -3/8$$

- Die Güte von \mathcal{A} ist also $\gamma(0011, 1001) = |2\varepsilon(\mathcal{U}_{0011} \oplus \mathcal{V}_{1001})| = 3/4$
- Die Tabelle auf der nächsten Folie zeigt die Anzahlen $L(a, b)$ für alle Werte von a und b (in Hexadezimaldarstellung)

Lineare Approximationen

Beispiel (Fortsetzung)

	b															
a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	16	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	
1	8	8	6	6	8	8	6	14	10	10	8	8	10	10	8	
2	8	8	6	6	8	8	6	6	8	8	10	10	8	8	2	
3	8	8	8	8	8	8	8	8	10	2	6	6	10	10	6	
4	8	10	8	6	6	4	6	8	8	6	8	10	10	4	10	
								⋮								
B	8	12	8	4	12	8	12	8	8	8	8	8	8	8	8	
								⋮								
F	8	6	4	6	6	8	10	8	8	6	12	6	6	8	10	

Unser nächstes Ziel ist, geeignete lineare Approximationen für bestimmte S-Boxen im SPN zu finden, die sich zu einer linearen Approximation der Abbildung $x \mapsto u^4$ zusammenschalten lassen (siehe nächste Folie)

Substitutions-Permutations-Netzwerke

Beispiel (Schluss)

