

Vorlesungsskript  
Graphalgorithmen

Sommersemester 2021

Prof. Dr. Johannes Köbler  
Humboldt-Universität zu Berlin  
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

13. Juni 2021

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Graphentheoretische Grundlagen</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Färben von Graphen</b>	<b>3</b>
2.1	Färben von planaren Graphen . . . . .	4
2.2	Färben von chordalen Graphen . . . . .	10
2.3	Der Satz von Brooks . . . . .	17
2.4	Kantenfärbungen . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Flüsse in Netzwerken</b>	<b>22</b>
3.1	Der Ford-Fulkerson-Algorithmus . . . . .	22
3.2	Der Edmonds-Karp-Algorithmus . . . . .	27
3.3	Der Algorithmus von Dinitz . . . . .	28
3.4	Kostenoptimale Flüsse . . . . .	36

# 1 Graphentheoretische Grundlagen

**Definition 1.1.** Ein (*ungerichteter*) **Graph** ist ein Paar  $G = (V, E)$ , wobei

$V$  - eine endliche Menge von **Knoten/Ecken** und

$E$  - die Menge der **Kanten** ist.

Hierbei gilt

$$E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}.$$

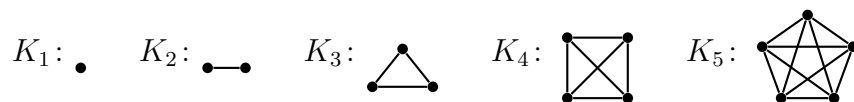
Sei  $v \in V$  ein Knoten.

- Die **Nachbarschaft** von  $v$  ist  $N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$ .
- Der **Grad** von  $v$  ist  $\deg_G(v) = |N_G(v)|$ .
- Der **Minimalgrad** von  $G$  ist  $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg_G(v)$  und der **Maximalgrad** von  $G$  ist  $\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg_G(v)$ .
- Jeder Knoten  $u \in V$  vom Grad  $\leq 1$  heißt **Blatt** und die übrigen Knoten (vom Grad  $\geq 2$ ) heißen **innere Knoten** von  $G$ .

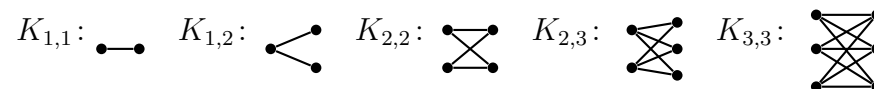
Falls  $G$  aus dem Kontext ersichtlich ist, schreiben wir auch einfach  $N(v)$ ,  $\deg(v)$ ,  $\delta$  usw.

**Beispiel 1.2.**

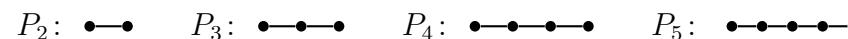
- Der **vollständige Graph**  $(V, E)$  auf  $n$  Knoten, d.h.  $|V| = n$  und  $E = \binom{V}{2}$ , wird mit  $K_n$  und der **leere Graph**  $(V, \emptyset)$  auf  $n$  Knoten wird mit  $E_n$  bezeichnet.



- Der **vollständige bipartite Graph**  $(A, B, E)$  auf  $a + b$  Knoten, d.h.  $A \cap B = \emptyset$ ,  $|A| = a$ ,  $|B| = b$  und  $E = \{\{u, v\} \mid u \in A, v \in B\}$  wird mit  $K_{a,b}$  bezeichnet.



- Der **Pfad** mit  $n$  Knoten wird mit  $P_n$  bezeichnet.



- Der **Kreis** mit  $n$  Knoten wird mit  $C_n$  bezeichnet.



**Definition 1.3.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph.

- Eine Knotenmenge  $U \subseteq V$  heißt **unabhängig** oder **stabil**, wenn es keine Kante von  $G$  mit beiden Endpunkten in  $U$  gibt, d.h. es gilt  $E \cap \binom{U}{2} = \emptyset$ . Die **Stabilitätszahl** ist

$$\alpha(G) = \max\{|U| \mid U \text{ ist stabile Menge in } G\}.$$

- Eine Knotenmenge  $U \subseteq V$  heißt **Clique**, wenn jede Kante mit beiden Endpunkten in  $U$  in  $E$  ist, d.h. es gilt  $\binom{U}{2} \subseteq E$ . Die **Cliquenzahl** ist

$$\omega(G) = \max\{|U| \mid U \text{ ist Clique in } G\}.$$

- Ein Graph  $G' = (V', E')$  heißt **Sub-/Teil-/Untergraph** von  $G$ , falls  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$  ist. Im Fall  $V' = V$  wird  $G'$  auch ein **(auf)spannender** Teilgraph von  $G$  genannt und wir schreiben für  $G'$  auch  $G - E''$  (bzw.  $G = G' \cup E''$ ), wobei  $E'' = E - E'$  die Menge der aus  $G$  entfernten Kanten ist. Im Fall  $E'' = \{e\}$  schreiben wir für  $G'$  auch einfach  $G - e$  (bzw.  $G = G' \cup e$ ).

- d) Ein  $k$ -regulärer spannender Teilgraph von  $G$  wird auch als  **$k$ -Faktor** von  $G$  bezeichnet. Ein  $d$ -regulärer Graph  $G$  heißt  **$k$ -faktorisierbar**, wenn sich  $G$  in  $l = d/k$  kantendisjunkte  $k$ -Faktoren  $G_1, \dots, G_l$  zerlegen lässt.
- e) Ein Subgraph  $G' = (V', E')$  heißt (**durch  $V'$** ) **induziert**, falls  $E' = E \cap \binom{V'}{2}$  ist. Für  $G'$  schreiben wir dann auch  $G[V']$  oder  $G - V''$ , wobei  $V'' = V - V'$  die Menge der aus  $G$  entfernten Knoten ist. Ist  $V'' = \{v\}$ , so schreiben wir für  $G'$  auch einfach  $G - v$  und im Fall  $V' = \{v_1, \dots, v_k\}$  auch  $G[v_1, \dots, v_k]$ .
- f) Ein **Weg** ist eine Folge von (nicht notwendig verschiedenen) Knoten  $v_0, \dots, v_\ell$  mit  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$  für  $i = 0, \dots, \ell - 1$ . Die **Länge** des Weges ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten, also  $\ell$ . Im Fall  $\ell = 0$  heißt der Weg **trivial**. Ein Weg  $(v_0, \dots, v_\ell)$  heißt auch  **$v_0$ - $v_\ell$ -Weg**.
- g)  $G$  heißt **zusammenhängend**, falls es für alle Paare  $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$  einen  $u$ - $v$ -Weg gibt.
- h) Die durch die Äquivalenzklassen  $V_i \subseteq V$  der Relation
- $$Z = \{(u, v) \in V \times V \mid \text{es gibt in } G \text{ einen } u\text{-}v\text{-Weg}\}$$
- induzierten Teilgraphen  $G[V_i]$  heißen **Zusammenhangskomponenten** (engl. connected components) oder einfach **Komponenten** von  $G$ .
- i) Ein  $u$ - $v$ -Weg heißt **einfach** oder  **$u$ - $v$ -Pfad**, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.
- j) Ein **Zyklus** ist ein  $u$ - $v$ -Weg mit  $u = v$ .
- k) Eine Menge von Pfaden heißt **disjunkt**, wenn je zwei Pfade in der Menge keine gemeinsamen Knoten haben, **kantendisjunkt**, wenn je zwei Pfade in der Menge keine gemeinsamen Kanten haben, und **knotendisjunkt**, wenn je zwei Pfade in der Menge höchstens gemeinsame Endpunkte haben.
- l) Ein **Kreis** ist ein Zyklus  $(v_1, \dots, v_\ell, v_1)$  der Länge  $\ell \geq 3$ , für den  $v_1, \dots, v_\ell$  paarweise verschieden sind.

- m) Ein Graph heißt **kreisfrei**, **azyklisch** oder **Wald**, falls er keinen Kreis enthält. Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Wald.

**Definition 1.4.** Ein **gerichteter Graph** oder **Digraph** ist ein Paar  $G = (V, E)$ , wobei

$V$  - eine endliche Menge von **Knoten/Ecken** und  
 $E$  - die Menge der **Kanten** ist.

Hierbei gilt

$$E \subseteq V \times V = \{(u, v) \mid u, v \in V\},$$

wobei  $E$  auch Schlingen  $(u, u)$  enthalten kann. Sei  $v \in V$  ein Knoten.

- a) Die **Nachfolgermenge** von  $v$  ist  $N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$ .
- b) Die **Vorgängermenge** von  $v$  ist  $N^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$ .
- c) Die **Nachbarmenge** von  $v$  ist  $N(v) = N^+(v) \cup N^-(v)$ .
- d) Der **Ausgangsgrad** von  $v$  ist  $\deg^+(v) = |N^+(v)|$  und der **Eingangsgrad** von  $v$  ist  $\deg^-(v) = |N^-(v)|$ . Der **Grad** von  $v$  ist  $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$ .
- e) Ein (**gerichteter**)  **$v_0$ - $v_\ell$ -Weg** ist eine Folge von Knoten  $v_0, \dots, v_\ell$  mit  $(v_i, v_{i+1}) \in E$  für  $i = 0, \dots, \ell - 1$ .
- f) Ein (**gerichteter**) **Zyklus** ist ein gerichteter  $u$ - $v$ -Weg mit  $u = v$ .
- g) Ein gerichteter Weg heißt **einfach** oder (**gerichteter**) **Pfad**, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.
- h) Ein (**gerichteter**) **Kreis** in  $G$  ist ein gerichteter Zyklus  $(v_1, \dots, v_\ell, v_1)$  der Länge  $\ell \geq 1$ , für den  $v_1, \dots, v_\ell$  paarweise verschieden sind.
- i)  $G$  heißt **kreisfrei** oder **azyklisch**, wenn es in  $G$  keinen gerichteten Kreis gibt.
- j)  $G$  heißt **stark zusammenhängend**, wenn es in  $G$  für jedes Knotenpaar  $u \neq v \in V$  sowohl einen  $u$ - $v$ -Pfad als auch einen  $v$ - $u$ -Pfad gibt.
- k)  $G$  heißt **gerichteter Wald**, wenn  $G$  kreisfrei ist und jeder Knoten  $v \in V$  Eingangsgrad  $\deg^-(v) \leq 1$  hat.

- l) Ein Knoten  $w \in V$  vom Eingangsgrad  $\deg^-(w) = 0$  heißt **Wurzel** von  $G$ , und ein Knoten  $u \in V$  vom Ausgangsgrad  $\deg^+(u) = 0$  heißt **Blatt** von  $G$ .

Die **Adjazenzmatrix** eines Graphen bzw. Digraphen  $G = (V, E)$  mit (geordneter) Knotenmenge  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  ist die  $(n \times n)$ -Matrix  $A = (a_{ij})$  mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

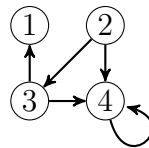
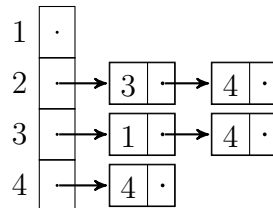
Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenzmatrix symmetrisch mit  $a_{ii} = 0$  für  $i = 1, \dots, n$ .

Bei der **Adjazenzlisten-Darstellung** wird für jeden Knoten  $v_i$  eine Liste mit seinen Nachbarn verwaltet. Im gerichteten Fall verwaltet man entweder nur die Liste der Nachfolger oder zusätzlich eine weitere für die Vorgänger. Falls die Anzahl der Knoten statisch ist, organisiert man die Adjazenzlisten in einem Feld, d.h. das Feldelement mit Index  $i$  verweist auf die Adjazenzliste von Knoten  $v_i$ . Falls sich die Anzahl der Knoten dynamisch ändert, so werden die Adjazenzlisten typischerweise ebenfalls in einer doppelt verketteten Liste verwaltet.

### Beispiel 1.5.

Betrachte den gerichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  und  $E = \{(2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 4)\}$ . Dieser hat folgende Adjazenzmatrix- und Adjazenzlisten-Darstellung:

	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	1
4	0	0	0	1



## 2 Färben von Graphen

**Definition 2.1.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und sei  $k \in \mathbb{N}$ .

- a) Eine Abbildung  $f: V \rightarrow \mathbb{N}$  heißt **Färbung** von  $G$ , wenn  $f(u) \neq f(v)$  für alle  $\{u, v\} \in E$  gilt.
- b)  $G$  heißt **k-färbbar**, falls eine Färbung  $f: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  existiert.
- c) Die **chromatische Zahl** ist

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}.$$

### Beispiel 2.2.

$$\chi(E_n) = 1, \chi(K_{n,m}) = 2, \chi(K_n) = n,$$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade} \\ 3, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein wichtiges Entscheidungsproblem ist, ob ein gegebener Graph  $k$ -färbbar ist. Dieses Problem ist für jedes feste  $k \geq 3$  schwierig.

### $k$ -Färbbarkeit ( $k$ -COLORING):

**Gegeben:** Ein Graph  $G$ .

**Gefragt:** Ist  $G$   $k$ -färbbar?

**Satz 2.3.**  $k$ -COLORING ist für  $k \geq 3$  NP-vollständig.

Das folgende Lemma setzt die chromatische Zahl  $\chi(G)$  in Beziehung zur Stabilitätszahl  $\alpha(G)$ .

**Lemma 2.4.**  $n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$ .

◁

*Beweis.* Sei  $G$  ein Graph und sei  $c$  eine  $\chi(G)$ -Färbung von  $G$ . Da dann die Mengen  $S_i = \{u \in V \mid c(u) = i\}$ ,  $i = 1, \dots, \chi(G)$ , stabil sind, folgt  $|S_i| \leq \alpha(G)$  und somit gilt

$$n = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |S_i| \leq \chi(G) \alpha(G).$$

Für den Beweis von  $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$  sei  $S$  eine stabile Menge in  $G$  mit  $|S| = \alpha(G)$ . Dann ist  $G - S$   $k$ -färbbar für ein  $k \leq n - |S|$ . Da wir alle Knoten in  $S$  mit der Farbe  $k + 1$  färben können, folgt  $\chi(G) \leq k + 1 \leq n - \alpha(G) + 1$ . ■

Beide Abschätzungen sind scharf, können andererseits aber auch beliebig schlecht werden.

**Lemma 2.5.**  $\binom{\chi(G)}{2} \leq m$  und somit  $\chi(G) \leq 1/2 + \sqrt{2m + 1/4}$ .

*Beweis.* Zwischen je zwei Farbklassen einer optimalen Färbung muss es mindestens eine Kante geben. ■

Die chromatische Zahl steht auch in Beziehung zur Cliquenzahl  $\omega(G)$  und zum Maximalgrad  $\Delta(G)$ :

**Lemma 2.6.**  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

*Beweis.* Die erste Ungleichung folgt daraus, dass die Knoten einer maximal großen Clique unterschiedliche Farben erhalten müssen.

Um die zweite Ungleichung zu erhalten, betrachten wir folgenden Färbungsalgorithmus:

#### Algorithmus greedy-color

---

```

1  input ein Graph  $G = (V, E)$  mit  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ 
2   $c(v_1) := 1$ 
3  for  $i := 2$  to  $n$  do
4     $F_i := \{c(v_j) \mid j < i, v_j \in N(v_i)\}$ 
5     $c(v_i) := \min\{k \geq 1 \mid k \notin F_i\}$ 

```

---

Da für die Farbe  $c(v_i)$  von  $v_i$  nur  $|F_i| \leq \Delta(G)$  Farben verboten sind, gilt  $c(v_i) \leq \Delta(G) + 1$ . ■

## 2.1 Färben von planaren Graphen

Ein Graph  $G$  heißt **planar**, wenn er so in die Ebene einbettbar ist, dass sich zwei verschiedene Kanten höchstens in ihren Endpunkten berühren. Dabei werden die Knoten von  $G$  als Punkte und die Kanten von  $G$  als Verbindungslinien (genauer: Jordankurven) zwischen den zugehörigen Endpunkten dargestellt.

Bereits im 19. Jahrhundert wurde die Frage aufgeworfen, wie viele Farben höchstens benötigt werden, um eine Landkarte so zu färben, dass aneinander grenzende Länder unterschiedliche Farben erhalten. Offensichtlich lässt sich eine Landkarte in einen planaren Graphen transformieren, indem man für jedes Land einen Knoten zeichnet und benachbarte Länder durch eine Kante verbindet. Länder, die sich nur in einem Punkt berühren, gelten dabei nicht als benachbart.

Die Vermutung, dass 4 Farben ausreichen, wurde 1878 von Kempe „bewiesen“ und erst 1890 entdeckte Heawood einen Fehler in Kempes „Beweis“. Übrig blieb der *5-Farben-Satz*. Der *4-Farben-Satz* wurde erst 1976 von Appel und Haken bewiesen. Hierbei handelt es sich jedoch nicht um einen Beweis im klassischen Sinne, da zur Überprüfung der vielen auftretenden Spezialfälle Computer benötigt werden.

**Satz 2.7** (Appel, Haken 1976).

*Jeder planare Graph ist 4-färbbar.*

Aus dem Beweis des 4-Farben-Satzes von Appel und Haken lässt sich ein 4-Färbungsalgorithmus für planare Graphen mit einer Laufzeit von  $\mathcal{O}(n^4)$  gewinnen.

In 1997 fanden Robertson, Sanders, Seymour und Thomas einen einfacheren Beweis für den 4-Farben-Satz, welcher zwar einen deut-

lich schnelleren  $\mathcal{O}(n^2)$  Algorithmus liefert, aber ebenfalls nur mit Computer-Unterstützung verifizierbar ist.

**Beispiel 2.8.** Wie die folgenden Einbettungen von  $K_4$  und  $K_{2,3}$  in die Ebene zeigen, sind  $K_4$  und  $K_{2,3}$  planar.



Zur Beantwortung der Frage, ob auch  $K_5$  und  $K_{3,3}$  planar sind, betrachten wir die **Gebiete**, die bei der Einbettung von (zusammenhängenden) Graphen in die Ebene entstehen. Dabei gehören 2 Punkte zum selben Gebiet, falls es zwischen ihnen eine Verbindungslinie gibt, die keine Kante des eingebetten Graphen kreuzt oder berührt. Nur eines dieser Gebiete ist unbeschränkt und dieses wird als **äußeres Gebiet** bezeichnet. Die Anzahl der Gebiete von  $G$  bezeichnen wir mit  $r(G)$  oder kurz mit  $r$ . Die begrenzenden Kanten eines Gebietes  $g$  bilden seinen **Rand**  $\text{rand}(g)$ . Ihre Anzahl bezeichnen wir mit  $d(g)$ , wobei Kanten  $\{u, v\}$ , an die  $g$  von beiden Seiten grenzt, doppelt gezählt werden.

Der **Rand**  $\text{rand}(g)$  eines Gebiets  $g$  ist die (zirkuläre) Folge aller Kanten, die an  $g$  grenzen, wobei man jede Kante so durchläuft, dass  $g$  „in Fahrtrichtung links“ liegt bzw. jeden Knoten  $u$ , den man über eine Kante  $e$  erreicht, über die im Uhrzeigersinn nächste Kante  $e'$  wieder verlässt. Auf diese Weise erhält jede Kante auf dem Rand von  $g$  eine Richtung (oder Orientierung).

Da jede Kante zur Gesamtlänge  $\sum_g d(g)$  aller Ränder den Wert 2 beiträgt (sie wird genau einmal in jeder Richtung durchlaufen), folgt

$$\sum_g d(g) = 2m(G).$$

Wir nennen das Tripel  $G' = (V, E, R)$  eine **ebene Realisierung** des Graphen  $G = (V, E)$ , falls es eine Einbettung von  $G$  in die Ebene

gibt, deren Gebiete die Ränder in  $R$  haben. In diesem Fall nennen wir  $G' = (V, E, R)$  auch einen **ebenen Graphen**. Ist  $G$  nicht zusammenhängend, so betten wir die Komponenten von  $G$  in die Ebene ein und fassen alle Ränder, die bei diesen Einbettungen entstehen, zu einer Randmenge  $R$  zusammen.

Führen zwei Einbettungen von  $G$  in die Ebene auf dieselbe Randmenge  $R$ , so werden sie als **äquivalent** angesehen. Eine andere Möglichkeit, Einbettungen bis auf Äquivalenz kombinatorisch zu beschreiben, besteht darin, für jeden Knoten  $u$  die (zirkuläre) Ordnung  $\pi_u$  aller mit  $u$  inzidenten Kanten anzugeben. Man nennt  $\pi = \{\pi_u \mid u \in V\}$  ein **Rotationssystem** für  $G$ , falls es eine entsprechende Einbettung gibt. Rotationssysteme haben den Vorteil, dass sie bei Verwendung der Adjazenzlistendarstellung ohne zusätzlichen Platzaufwand gespeichert werden können, indem man die zu  $u$  adjazenten Knoten gemäß  $\pi_u$  anordnet.

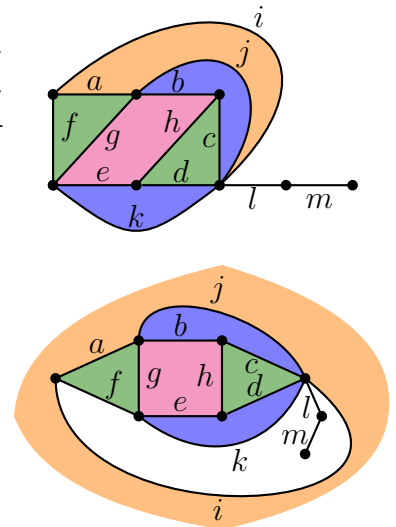
**Beispiel 2.9.** Die beiden nebenstehenden Einbettungen eines Graphen  $G = (V, E)$  in die Ebene haben jeweils 7 Gebiete und führen beide auf den ebenen Graphen  $G' = (V, E, R)$  mit den 7 Rändern

$$R = \{(a, f, g), (a, j, i), (b, g, e, h), (b, c, j), (c, h, d), (d, e, k), (f, i, l, m, m, l, k)\}.$$

Das zugehörige Rotationssystem ist

$$\pi = \{(a, f, i), (a, j, b, g), (b, c, h), (e, k, f, g), (d, e, h), (c, j, i, l, k, d), (l, m), (m)\}.$$

Man beachte, dass sowohl in  $R$  als auch in  $\pi$  jede Kante genau zweimal vorkommt. Anstelle von (zirkulären) Kantenfolgen kann man die Elemente von  $R$  und  $\pi$  natürlich auch durch entsprechende Knotenfolgen beschreiben.



**Satz 2.10** (Polyederformel von Euler, 1750).

Für einen zusammenhängenden ebenen Graphen  $G = (V, E, R)$  gilt

$$n(G) - m(G) + r(G) = 2. \quad (*)$$

*Beweis.* Wir führen den Beweis durch Induktion über die Kantenanzahl  $m(G) = m$ .

$m = 0$ : Da  $G$  zusammenhängend ist, muss dann  $n = 1$  sein.

Somit ist auch  $r = 1$ , also  $(*)$  erfüllt.

$m - 1 \rightsquigarrow m$ : Sei  $G$  ein zusammenhängender ebener Graph mit  $m$  Kanten.

Ist  $G$  ein Baum, so entfernen wir ein Blatt und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen  $G'$  mit  $n' = n - 1$  Knoten,  $m' = m - 1$  Kanten und  $r' = r$  Gebieten. Nach IV folgt  $n - m + r = (n - 1) - (m - 1) + r = n' - m' + r' = 2$ .

Falls  $G$  kein Baum ist, entfernen wir eine Kante auf einem Kreis in  $G$  und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen  $G'$  mit  $n' = n$  Knoten,  $m' = m - 1$  Kanten und  $r' = r - 1$  Gebieten. Nach IV folgt  $n - m + r = n - (m - 1) + (r - 1) = n' - m' + r' = 2$ . ■

**Korollar 2.11.** Sei  $G = (V, E)$  ein planarer Graph mit  $n \geq 3$  Knoten. Dann ist  $m \leq 3n - 6$ . Falls  $G$  dreiecksfrei ist, gilt sogar  $m \leq 2n - 4$ .

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $G$  zusammenhängend. Wir betrachten eine beliebige planare Einbettung von  $G$ . Da  $n \geq 3$  ist, ist jedes Gebiet  $g$  von  $d(g) \geq 3$  Kanten umgeben. Daher ist  $2m = i = \sum_g d(g) \geq 3r$  bzw.  $r \leq 2m/3$ . Eulers Formel liefert

$$m = n + r - 2 \leq n + 2m/3 - 2,$$

was  $(1 - 2/3)m \leq n - 2$  und somit  $m \leq 3n - 6$  impliziert.

Wenn  $G$  dreiecksfrei ist, ist jedes Gebiet von  $d(g) \geq 4$  Kanten umgeben. Daher ist  $2m = i = \sum_g d(g) \geq 4r$  bzw.  $r \leq m/2$ . Eulers Formel

liefert daher  $m = n + r - 2 \leq n + m/2 - 2$ , was  $m/2 \leq n - 2$  und somit  $m \leq 2n - 4$  impliziert. ■

**Korollar 2.12.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind nicht planar.

*Beweis.* Wegen  $n(K_5) = 5$ , also  $3n(K_5) - 6 = 9$ , und wegen  $m(K_5) = \binom{5}{2} = 10$  gilt  $m(K_5) \not\leq 3n(K_5) - 6$ .

Wegen  $n(K_{3,3}) = 6$ , also  $2n(K_{3,3}) - 4 = 8$ , und wegen  $m(K_{3,3}) = 3 \cdot 3 = 9$  gilt  $m(K_{3,3}) \not\leq 2n(K_{3,3}) - 4$ . ■

Als weitere interessante Folgerung aus der Polyederformel können wir zeigen, dass jeder planare Graph einen Knoten  $v$  vom Grad  $\deg(v) \leq 5$  hat.

**Korollar 2.13.** Jeder planare Graph hat einen Minimalgrad  $\delta \leq 5$ .

*Beweis.* Für  $n \leq 6$  ist die Behauptung klar. Für  $n > 6$  impliziert die Annahme  $\delta \geq 6$  die Ungleichung

$$m = \frac{1}{2} \sum_{u \in V} \deg(u) \geq \frac{1}{2} \sum_{u \in V} 6 = 3n,$$

was im Widerspruch zu  $m \leq 3n - 6$  steht. ■

**Definition 2.14.** Seien  $G = (V, E)$  und  $H$  Graphen und seien  $u, v \in V$ .

- Durch **Fusion** von  $u$  und  $v$  entsteht aus  $G$  der Graph  $G_{uv} = (V - \{v\}, E')$  mit

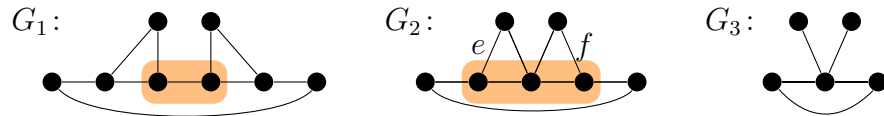
$$E' = \{e \in E \mid v \notin e\} \cup \{\{u, v'\} \mid \{v, v'\} \in E - \{u, v\}\}.$$

- Ist  $e = \{u, v\}$  eine Kante von  $G$  (also  $e \in E$ ), so sagen wir auch,  $G_{uv}$  entsteht aus  $G$  durch **Kontraktion** der Kante  $e$ .
- Hat zudem  $v$  den Grad 2 mit  $N_G(v) = \{u, w\}$ , so sagen wir auch,  $G_{uv}$  entsteht aus  $G$  durch **Überbrückung** des Knotens  $v$  bzw.  $G$  aus  $G_{uv}$  durch **Unterteilung** der Kante  $\{u, w\}$ .



- $G$  heißt zu  $H$  **kontrahierbar**, falls  $H$  aus einer isomorphen Kopie von  $G$  durch wiederholte Kontraktionen gewonnen werden kann. In diesem Fall nennen wir  $H$  auch eine **Kontraktion** von  $G$  bzw.  $G$  eine **Expansion** von  $H$ .
- $H$  heißt zu  $G$  **unterteilbar**, falls  $G$  aus einer isomorphen Kopie von  $H$  durch wiederholte Unterteilungen von Kanten gewonnen werden kann. In diesem Fall nennen wir  $G$  auch eine **Unterteilung** von  $H$  bzw.  $H$  eine **Überbrückung** von  $G$ .
- $H$  heißt **Minor** von  $G$ , wenn ein Teilgraph von  $G$  zu  $H$  kontrahierbar ist.  $H$  heißt **topologischer Minor** von  $G$ , wenn ein Teilgraph von  $G$  eine Unterteilung von  $H$  ist.
- $G$  heißt  **$H$ -frei**, falls  $H$  kein Minor von  $G$  ist. Für eine Menge  $\mathcal{H}$  von Graphen heißt  $G$   **$\mathcal{H}$ -frei**, falls kein  $H \in \mathcal{H}$  ein Minor von  $G$  ist.

**Beispiel 2.15.** Betrachte folgende Graphen:



- $G_2$  ist ein Minor von  $G_1$ , da  $G_2$  durch Kontraktion der in  $G_1$  umrandeten Kante entsteht; entsprechend ist  $G_3$  ein Minor von  $G_2$  und auch von  $G_1$ .
- $G_2$  ist keine Unterteilung von  $G_3$ , da  $G_2$  im Gegensatz zu  $G_3$  Knoten vom Grad 3 hat. Falls wir jedoch die beiden Kanten  $e$  und  $f$  aus  $G_2$  entfernen, so ist der resultierende Teilgraph  $G'_2$  eine Unterteilung von  $G_3$ . Somit ist  $G_3$  ein topologischer Minor von  $G_2$ .
- $G_2$  und  $G_3$  sind aber keine topologischen Minoren von  $G_1$ , da  $G_2$  und  $G_3$  einen Knoten vom Grad 4 haben, aber  $G_1$  nur Knoten vom Grad  $\leq 3$ .  $\triangleleft$

Es ist klar, dass die Klasse  $\mathcal{K}$  der planaren Graphen zwar unter Subgraphbildung, Kontraktion, Unterteilung und Überbrückung abge-

schlossen ist, aber nicht unter Fusion. Folglich ist jeder (topologische) Minor und jede Unterteilung eines planaren Graphen ebenfalls planar. Nach Definition lässt sich jeder (topologische) Minor  $H$  von  $G$  aus einem zu  $G$  isomorphen Graphen durch wiederholte Anwendung folgender Operationen gewinnen:

- Entfernen einer Kante oder eines Knotens,
- Kontraktion einer Kante (bzw. Überbrückung eines Knotens).

Da die Kontraktionen (bzw. Überbrückungen) o.B.d.A. auch zuletzt ausgeführt werden können, gilt hiervon auch die Umkehrung. Zudem ist leicht zu sehen, dass zwei Graphen  $G$  und  $H$  genau dann (topologische) Minoren voneinander sind, wenn sie isomorph sind.

**Satz 2.16** (Kempe 1878, Heawood 1890).  
Jeder planare Graph ist 5-färbbar.

*Beweis.* Wir beweisen den Satz durch Induktion über  $n$ .

$n = 1$ : Klar.

$n - 1 \rightsquigarrow n$ : Sei  $G$  ein planarer Graph mit  $n(G) = n$  Knoten. Da  $G$  planar ist, existiert ein Knoten  $u$  mit  $\deg(u) \leq 5$ . Nun konstruieren wir zu  $G$  wie folgt einen Minor  $G'$ :

- Im Fall  $\deg(u) \leq 4$  sei  $G' = G - u$ , d.h. wir entfernen  $u$  aus  $G$ .
- Andernfalls hat  $u$  zwei Nachbarn  $v$  und  $w$ , die nicht durch eine Kante verbunden sind (andernfalls wäre  $K_5$  ein Teilgraph von  $G$ ). In diesem Fall sei  $G' = (G_{vu})_{vw}$ , d.h. wir kontrahieren die beiden Kanten  $\{u, v\}$  und  $\{u, w\}$  zum Knoten  $v$ .

Da  $G'$  ein Minor von  $G$  ist, ist  $G'$  planar. Da  $G'$  zudem höchstens  $n - 1$  Knoten hat, hat  $G'$  nach IV eine 5-Färbung  $c'$ . Wir erweitern  $c'$  wie folgt zu einer 5-Färbung  $c$  von  $G$ :

- Im 2. Fall geben wir dem Knoten  $w$  die Farbe  $c(w) = c'(v)$ .
- Da nun in beiden Fällen die Nachbarn von  $u$  in  $G$  höchstens 4 verschiedene Farben haben, können wir auch  $u$  eine Farbe  $c(u) \leq 5$  geben.  $\blacksquare$

Kuratowski konnte 1930 beweisen, dass jeder nichtplanare Graph  $G$  den  $K_{3,3}$  oder den  $K_5$  als topologischen Minor enthält. Für den Beweis benötigen wir noch folgende Notationen.

**Definition 2.17.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $S \subseteq V$ .

- Die Menge  $S$  heißt **Separator** in  $G$ , wenn es zwei Knoten  $u, v \in V \setminus S$  gibt, zwischen denen in  $G - S$  kein  $u$ - $v$ -Weg existiert. Ist  $|S| = k$ , so nennen wir  $S$  auch einen  **$k$ -Separator** zwischen  $u$  und  $v$  oder auch einen  **$u$ - $v$ -Separator** der Größe  $k$ . Ein 1-Separator wird auch **Artikulation** oder **Schnittknoten** von  $G$  genannt.
- Ein Graph  $G$  heißt  **$k$ -zusammenhängend**,  $0 \leq k \leq n - 1$ , falls  $G$  keinen  $(k - 1)$ -Separator hat. Die größte Zahl  $k$ , für die  $G$   $k$ -zusammenhängend ist, heißt die **Zusammenhangszahl** von  $G$  und wird mit  $\kappa(G)$  bezeichnet.

Ein Graph  $G$  mit  $n \geq 2$  Knoten ist also genau dann zusammenhängend, wenn  $\kappa(G) \geq 1$  ist.

**Lemma 2.18.** Ist ein Graph  $G = (V, E)$  nicht planar, so hat er einen

- 2-zusammenhängenden Untergraphen  $U = (V', E')$  und einen
- 3-zusammenhängenden topologischen Minor  $M = (V'', E'')$ ,

die **minimal nicht planar** sind, d.h.  $U$  und  $M$  sind nicht planar und für alle  $e' \in E'$  und  $e'' \in E''$  sind die Graphen  $U - e'$  und  $M - e''$  planar.

*Beweis.* Wir entfernen zuerst solange Kanten und Knoten aus  $G$ , bis wir aus dem verbliebenen Teilgraphen  $U = (V', E')$  keine weiteren Kanten oder Knoten entfernen können, ohne dass  $U$  planar wird.

$U$  ist zusammenhängend, da andernfalls mindestens eine Komponente von  $U$  nicht planar ist und wir alle übrigen Komponenten entfernen könnten, ohne dass  $U$  planar wird.

$U$  ist sogar 2-zusammenhängend, da  $U$  sonst einen Schnittknoten  $s$  enthält und  $U - s$  in  $k \geq 2$  Komponenten  $U[V_1], \dots, U[V_k]$  zerfällt.

Dann ist aber mindestens ein Teilgraph  $T_i = U[V_i \cup \{s\}]$  nicht planar und wir können alle Knoten außerhalb von  $T_i$  entfernen, ohne dass  $U$  planar wird.

Um einen topologischen Minor  $M$  von  $G$  mit den behaupteten Eigenschaften zu erhalten, konstruieren wir zu  $U$  einen topologischen Minor  $U'$ , der minimal nicht planar ist und zudem 3-zusammenhängend ist oder weniger Knoten als  $U$  hat. Indem wir diese Konstruktion wiederholen, erhalten wir schließlich  $M$ .

Falls  $U$  3-zusammenhängend ist, ist  $U' = U$ . Andernfalls gibt es in  $U$  einen 2-Separator  $S = \{u, v\}$ , d.h.  $U - S$  zerfällt in  $k \geq 2$  Komponenten  $U[V_1], \dots, U[V_k]$ . Betrachte die (2-zusammenhängenden) Graphen  $G_i = U[V_i \cup \{u, v\}] \cup \{u, v\}$ . Dann ist mindestens ein  $G_i$  nicht planar (z.B.  $G_1$ ), da sonst auch  $U$  planar wäre. Da  $k \geq 2$  ist, erhalten wir einen zu  $G_1$  isomorphen Graphen  $U'$  als topologischen Minor von  $H = U[V_1 \cup V_2 \cup \{u, v\}]$  (und damit von  $U$ ), indem wir in  $U[V_2 \cup \{u, v\}]$  einen beliebigen  $u$ - $v$ -Pfad  $P$  wählen und aus  $H$  alle Knoten und Kanten entfernen, die nicht auf  $P$  liegen und danach  $P$  überbrücken. Dann hat  $U'$  weniger Knoten als  $U$  und ist wie  $U$  minimal nicht planar. ■

**Definition 2.19.** Sei  $G$  ein Graph und sei  $K$  ein Kreis in  $G$ . Ein Teilgraph  $B$  von  $G$  heißt **Brücke** von  $K$  in  $G$ , falls

- $B$  nur aus einer Kante besteht, die zwei Knoten von  $K$  verbindet, aber nicht auf  $K$  liegt (solche Brücken werden auch als **Sehnen** von  $K$  bezeichnet), oder
- $B - K$  eine Komponente von  $G - K$  ist und  $B$  aus  $B - K$  durch Hinzufügen aller Kanten zwischen  $B - K$  und  $K$  (und der zugehörigen Endpunkte auf  $K$ ) entsteht.

Die Knoten von  $B$ , die auf  $K$  liegen, heißen **Kontaktpunkte** von  $B$ . Zwei Brücken  $B$  und  $B'$  von  $K$  heißen **inkompatibel**, falls

- $B$  Kontaktpunkte  $u, v$  und  $B'$  Kontaktpunkte  $u', v'$  hat, so dass diese vier Punkte in der Reihenfolge  $u, u', v, v'$  auf  $K$  liegen, oder

- $B$  und  $B'$  mindestens 3 gemeinsame Kontaktpunkte haben.

Es ist leicht zu sehen, dass in einem planaren Graphen kein Kreis mehr als zwei inkompatible Brücken haben kann.

**Satz 2.20** (Kuratowski 1930).

Für einen Graphen  $G$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $G$  ist planar.
- (ii)  $G$  enthält weder den  $K_{3,3}$  noch den  $K_5$  als topologischen Minor.

*Beweis.* Die Implikation von i) nach ii) folgt aus der Abgeschlossenheit der planaren Graphen unter (topologischer) Minorenbildung.

Die Implikation von ii) nach i) zeigen wir durch Kontraposition. Sei also  $G = (V, E)$  nicht planar. Dann hat  $G$  nach Lemma 2.18 einen 3-zusammenhängenden nicht planaren topologischen Minor  $M = (V', E')$ , so dass  $M - e'$  für jede Kante  $e' \in E'$  planar ist. Wir entfernen eine beliebige Kante  $e_0 = \{a_0, b_0\}$  aus  $M$ . Dann ist  $M - e_0$  planar. Da  $M - e_0$  2-zusammenhängend ist, gibt es in  $M - e_0$  einen Kreis  $K$  durch die beiden Knoten  $a_0$  und  $b_0$  (siehe Übungen). Wir wählen  $K$  zusammen mit einer ebenen Realisierung  $H'$  von  $M - e_0$  so, dass  $K$  möglichst viele Gebiete in  $H'$  einschließt.

Für zwei Knoten  $a, b$  auf  $K$  bezeichnen wir mit  $K[a, b]$  die Menge aller Knoten, die auf dem Bogen von  $a$  nach  $b$  (im Uhrzeigersinn) auf  $K$  liegen. Zudem sei  $K[a, b) = K[a, b] \setminus \{b\}$ . Die Mengen  $K(a, b)$  und  $K(a, b]$  sind analog definiert.

Die Kanten jeder Brücke  $B$  von  $K$  in  $M - e_0$  verlaufen in  $H'$  entweder alle innerhalb oder alle außerhalb von  $K$ . Im ersten Fall nennen wir  $B$  eine **innere Brücke** und im zweiten eine **äußere Brücke**.

Es ist klar, dass  $K$  in  $H'$  mindestens eine innere und mindestens eine äußere Brücke haben muss (sonst könnten wir  $e'$  zu  $H'$  hinzufügen). Zudem muss jede äußere Brücke  $B$  genau zwei Kontaktpunkte haben: einen Knoten  $u \in K(a_0, b_0)$  und einen Knoten  $v \in K(b_0, a_0)$ . Andernfalls hätte  $B$  nämlich mindestens 2 Kontaktpunkte auf  $K[a_0, b_0]$  oder

auf  $K[b_0, a_0]$ . Daher könnte  $K$  zu einem Kreis  $K'$  erweitert werden, der in  $H'$  mehr Gebiete einschließt (bzw. ausschließt) als  $K$ , was der Wahl von  $K$  und  $H'$  widerspricht. Da  $M$  3-zusammenhängend ist, muss  $B$  zudem eine Sehne  $\{u, v\}$  sein.

$K$  hat in  $M$  außer den Brücken in  $M - e_0$  noch zusätzlich die Brücke  $e_0$ . Wir wählen nun eine innere Brücke  $B$ , die sowohl zu  $e_0$  als auch zu mindestens einer äußeren Brücke  $e_1 = \{a_1, b_1\}$  inkompatibel ist. Eine solche Brücke muss es geben, da wir sonst alle mit  $e_0$  inkompatiblen inneren Brücken nach außen klappen und  $e_0$  als innere Brücke hinzunehmen könnten, ohne die Planarität zu verletzen.

Wir benutzen  $K$  und die drei Brücken  $e_0$ ,  $e_1$  und  $B$ , um eine Unterteilung des  $K_{3,3}$  oder des  $K_5$  in  $M$  zu finden. Hierzu geben wir entweder zwei disjunkte Mengen  $A_1, A_2 \subseteq V'$  mit jeweils 3 Knoten an, so dass 9 knotendisjunkte Pfade zwischen allen Knoten  $a \in A_1$  und  $b \in A_2$  existieren. Oder wir geben eine Menge  $A \subseteq V'$  mit fünf Knoten an, so dass 10 knotendisjunkte Pfade zwischen je zwei Knoten  $a, b \in A$  existieren. Da  $e_0$  und  $e_1$  inkompatibel sind, können wir annehmen, dass die vier Knoten  $a_0, a_1, b_0, b_1$  in dieser Reihenfolge auf  $K$  liegen.

**Fall 1:**  $B$  hat einen Kontaktpunkt  $k_1 \notin \{a_0, a_1, b_0, b_1\}$ . Aus Symmetriegründen können wir  $k_1 \in K(a_0, a_1)$  annehmen. Da  $B$  weder zu  $e_0$  noch zu  $e_1$  kompatibel ist, hat  $B$  weitere Kontaktpunkte  $k_2 \in K(b_0, a_0)$  und  $k_3 \in K(a_1, b_1)$ , wobei  $k_2 = k_3$  sein kann.

**Fall 1a:** Ein Knoten  $k_i \in \{k_2, k_3\}$  liegt auf dem Bogen  $K(b_0, b_1)$ . In diesem Fall existieren 9 knotendisjunkte Pfade zwischen  $\{a_0, a_1, k_i\}$  und  $\{b_0, b_1, k_1\}$ .

**Fall 1b:**  $K(b_0, b_1) \cap \{k_2, k_3\} = \emptyset$ . In diesem Fall ist  $k_2 \in K[b_1, a_0]$  und  $k_3 \in K(a_1, b_0]$ . Dann gibt es in  $B$  einen Knoten  $u$ , von dem aus 3 knotendisjunkte Pfade zu  $\{k_1, k_2, k_3\}$  existieren. Folglich gibt es 9 knotendisjunkte Pfade zwischen  $\{a_0, a_1, u\}$  und  $\{k_1, k_2, k_3\}$ .

**Fall 2:** Alle Kontaktpunkte von  $B$  liegen in der Menge  $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$ . Da  $B$  inkompatibel zu  $e_0$  und  $e_1$  ist, müssen in diesem Fall alle vier

Punkte zu  $B$  gehören. Sei  $P_0$  ein  $a_0$ - $b_0$ -Pfad in  $B$  und sei  $P_1$  ein  $a_1$ - $b_1$ -Pfad in  $B$ . Sei  $u$  der erste Knoten auf  $P_0$ , der auch auf  $P_1$  liegt und sei  $v$  der letzte solche Knoten.

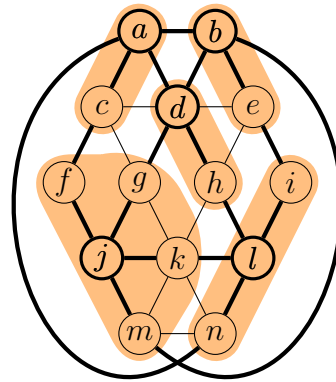
**Fall 2a:**  $u = v$ . Dann gibt es in  $B$  vier knotendisjunkte Pfade von  $u$  zu  $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$  und somit existieren in  $M$  10 knotendisjunkte Pfade zwischen den Knoten  $u, a_0, a_1, b_0, b_1$ .

**Fall 2b:**  $u \neq v$ . Durch  $u$  und  $v$  wird der Pfad  $P_1$  in drei Teilpfade  $P_{xu}$ ,  $P_{uv}$  und  $P_{vy}$  unterteilt, wobei die Indizes die Endpunkte bezeichnen und  $\{x, y\} = \{a_1, b_1\}$  ist.

Somit gibt es in  $B$  drei Pfade zwischen  $u$  und jedem Knoten in  $\{a_0, v, x\}$  und zwei Pfade zwischen  $v$  und jedem Knoten in  $\{b_0, y\}$ , die alle 5 knotendisjunkt sind. Folglich gibt es in  $M$  9 knotendisjunkte Pfade zwischen  $\{a_0, v, x\}$  und  $\{b_0, y, u\}$ . ■

**Beispiel 2.21.** Der nebenstehende Graph ist nicht planar, da wir den  $K_5$  durch Kontraktion der farblich unterlegten Teilgraphen als Minor von  $G$  erhalten.

Alternativ lässt sich der  $K_5$  auch als ein topologischer Minor von  $G$  erhalten, indem wir die dünnen Kanten entfernen und in dem resultierenden Teilgraphen alle Knoten vom Grad 2 überbrücken. ◁



Eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz von Kuratowski ist folgende Charakterisierung der Klasse der planaren Graphen.

**Korollar 2.22** (Wagner 1937). *Ein Graph ist genau dann planar, wenn er  $\{K_{3,3}, K_5\}$ -frei ist.*

**Satz 2.23** (Satz von Robertson und Seymour, 1983-2004). *Sei  $\mathcal{K}$  eine Graphklasse, die unter Minorenbildung abgeschlossen ist. Dann gibt*

*es eine endliche Menge  $\mathcal{H}$  von Graphen mit*

$$\mathcal{K} = \{G \mid G \text{ ist } \mathcal{H}\text{-frei}\}.$$

*Die Graphen in  $\mathcal{H}$  sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und heißen **verbotene Minoren** für die Klasse  $\mathcal{K}$ .*

Eine interessante Folgerung aus diesem Satz ist, dass jede unendliche Graphklasse zwei Graphen  $G$  und  $H$  enthält, so dass  $H$  ein Minor von  $G$  ist. Das Problem, für zwei gegebene Graphen  $G$  und  $H$  zu entscheiden, ob  $H$  ein Minor von  $G$  ist, ist zwar NP-vollständig (da sich das Hamiltonkreisproblem darauf reduzieren lässt). Für einen festen Graphen  $H$  ist das Problem dagegen effizient entscheidbar.

**Satz 2.24** (Robertson und Seymour, 1995). *Für jeden Graphen  $H$  gibt es einen  $O(n^3)$ -zeitbeschränkten Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen  $G$  entscheidet, ob er  $H$ -frei ist.*

**Korollar 2.25.** *Die Zugehörigkeit zu jeder unter Minorenbildung abgeschlossenen Graphklasse  $\mathcal{K}$  ist in P entscheidbar.*

Der Entscheidungsalgorithmus für  $\mathcal{K}$  lässt sich allerdings nur angeben, wenn wir die verbotenen Minoren für  $\mathcal{K}$  kennen. Leider ist der Beweis von Satz 2.23 in dieser Hinsicht nicht konstruktiv, so dass der Nachweis, dass  $\mathcal{K}$  unter Minorenbildung abgeschlossen ist, nicht automatisch zu einem effizienten Erkennungsalgorithmus für  $\mathcal{K}$  führt.

## 2.2 Färben von chordalen Graphen

Chordale Graphen treten in vielen Anwendungen auf, z.B. sind alle Intervall- und alle Splitgraphen chordal. Wir werden sehen, dass sich für chordale Graphen effizient eine optimale Knotenfärbung berechnen lässt.

**Definition 2.26.** *Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt **chordal** oder **trianguliert**, wenn jeder Kreis  $K = (u_1, \dots, u_l, u_1)$  der Länge  $l \geq 4$  in  $G$  mindestens eine Sehne hat.*

$G$  ist also genau dann chordal, wenn er keinen induzierten Kreis der Länge  $l \geq 4$  enthält (ein induzierter Kreis ist ein induzierter Teilgraph  $G[V']$ ,  $V' \subseteq V$ , der ein Kreis ist). Dies zeigt, dass die Klasse der chordalen Graphen unter induzierter Teilgraphbildung abgeschlossen ist (aber nicht unter Teilgraphbildung). Jede solche Graphklasse  $\mathcal{G}$  ist durch eine Familie von minimalen **verbotenen induzierten Teilgraphen**  $H_i$  charakterisiert, die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind. Die Graphen  $H_i$  gehören also nicht zu  $\mathcal{G}$ , aber sobald wir einen Knoten daraus entfernen, erhalten wir einen Graphen in  $\mathcal{G}$ . Die Klasse der chordalen Graphen hat die Familie der Kreise  $C_n$  der Länge  $n \geq 4$  als verbotene induzierte Teilgraphen.

**Lemma 2.27.** *Für einen Graphen  $G$  sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (i)  $G$  ist chordal.
- (ii) Jeder inklusionsminimale  $x$ - $y$ -Separator  $S$  in  $G$  ist eine Clique.
- (iii) Jedes Paar von nicht adjazenten Knoten  $x$  und  $y$  in  $G$  hat einen  $x$ - $y$ -Separator  $S$ , der eine Clique ist.

*Beweis.* Um zu zeigen, dass die zweite Aussage aus der ersten folgt, nehmen wir an, dass  $G$  einen minimalen  $x$ - $y$ -Separator  $S$  hat (d.h.  $S \setminus \{s\}$  ist für jedes  $s \in S$  kein  $x$ - $y$ -Separator), der zwei nicht adjazente Knoten  $u$  und  $v$  enthält. Seien  $G[V_1]$  und  $G[V_2]$  die beiden Komponenten in  $G - S$  mit  $x \in V_1$  und  $y \in V_2$ . Da  $S$  minimal ist, haben die beiden Knoten  $u$  und  $v$  sowohl einen Nachbarn in  $V_1$  als auch in  $V_2$ . Betrachte die beiden Teilgraphen  $G_i = G[V_i \cup \{u, v\}]$  ( $i = 1, 2$ ) und wähle jeweils einen kürzesten  $u$ - $v$ -Pfad  $P_i$  in  $G_i$ . Da deren Länge  $\geq 2$  ist, ist  $K = P_1 \cup P_2$  ein Kreis der Länge  $\geq 4$ . Aufgrund der Konstruktion ist zudem klar, dass  $K$  keine Sehnen in  $G$  hat.

Dass die zweite Aussage die dritte impliziert, ist klar, da jedes Paar von nicht adjazenten Knoten  $x$  und  $y$  einen  $x$ - $y$ -Separator  $S$  hat, und  $S$  eine Clique sein muss, wenn wir  $S$  inklusionsminimal wählen.

Um zu zeigen, dass die erste Aussage aus der dritten folgt, nehmen wir

an, dass  $G$  nicht chordal ist. Dann gibt es in  $G$  einen induzierten Kreis  $K$  der Länge  $\geq 4$ . Seien  $x$  und  $y$  zwei beliebige nicht adjazente Knoten auf  $K$  und sei  $S$  ein  $x$ - $y$ -Separator in  $G$ . Dann muss  $S$  mindestens zwei nicht adjazente Knoten aus  $K$  enthalten. ■

**Definition 2.28.** *Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und sei  $k \geq 0$ . Ein Knoten  $u \in V$  vom Grad  $k$  heißt  **$k$ -simplicial**, wenn alle Nachbarn von  $u$  paarweise adjazent sind. Jeder  $k$ -simpliciale Knoten wird auch als **simplicial** bezeichnet.*

Zusammenhängende chordale Graphen können als eine Verallgemeinerung von Bäumen aufgefasst werden. Ein Graph  $G$  ist ein Baum, wenn er aus  $K_1$  durch sukzessives Hinzufügen von 1-simplicialen Knoten erzeugt werden kann. Entsprechend heißt  $G$   **$k$ -Baum**, wenn  $G$  aus  $K_k$  durch sukzessives Hinzufügen von  $k$ -simplicialen Knoten erzeugt werden kann. Wir werden sehen, dass ein zusammenhängender Graph  $G$  genau dann chordal ist, wenn er aus einem isolierten Knoten (also aus einer 1-Clique) durch sukzessives Hinzufügen von simplicialen Knoten erzeugt werden kann. Äquivalent hierzu ist, dass  $G$  durch sukzessives Entfernen von simplicialen Knoten auf einen isolierten Knoten reduziert werden kann.

**Definition 2.29.** *Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine lineare Ordnung  $(u_1, \dots, u_n)$  auf  $V$  heißt **perfekte Eliminationsordnung (PEO)** von  $G$ , wenn  $u_i$  simplicial in  $G[u_1, \dots, u_i]$  für  $i = 2, \dots, n$  ist.*

Wir eliminieren die Knoten von  $G$  also in der Reihenfolge  $u_n, \dots, u_2, u_1$ . Es ist klar dass der  $K_n$  alle  $n!$  lineare Ordnungen auf  $V$  als PEO hat. Das folgende Lemma verallgemeinert die bekannte Tatsache, dass jeder nicht vollständige Baum  $T$  (also  $T \notin \{K_1, K_2\}$ ) mindestens zwei nicht adjazente Blätter hat.

**Lemma 2.30.** *Jeder nicht vollständige chordale Graph  $G$  besitzt mindestens zwei simpliciale Knoten, die nicht adjazent sind.*



*Beweis.* Wir führen Induktion über  $n$ . Für  $n \leq 2$  ist die Behauptung klar. Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit  $n \geq 3$  Knoten. Da  $G$  nicht vollständig ist, enthält  $G$  zwei nichtadjazente Knoten  $x_1$  und  $x_2$ . Sei  $S$  ein minimaler  $x_1$ - $x_2$ -Separator der Größe  $k \geq 0$ . Im Fall  $k > 0$  ist  $S$  nach Lemma 2.27 eine Clique in  $G$ . Seien  $G[V_1]$  und  $G[V_2]$  die beiden Komponenten von  $G - S$  mit  $x_i \in V_i$ . Wir zeigen die Existenz zweier simplizialer Knoten  $s_i \in V_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Betrachte die Teilgraphen  $G_i = G[V_i \cup S]$ . Da  $G_i$  chordal ist und weniger als  $n$  Knoten hat, ist  $G_i$  nach IV entweder eine Clique oder  $G_i$  enthält mindestens zwei nicht adjazente simpliziale Knoten  $y_i, z_i$ .

Falls  $G_i$  eine Clique ist, ist  $s_i = x_i$  simplizial in  $G_i$ , und da  $x_i$  keine Nachbarn außerhalb von  $V_i \cup S$  hat, ist  $s_i$  dann auch simplizial in  $G$ .

Ist  $G_i$  keine Clique, kann höchstens einer der beiden Knoten  $y_i, z_i$  zu  $S$  gehören (da  $S$  im Fall  $S \neq \emptyset$  eine Clique und  $\{y_i, z_i\} \notin E$  ist). O.B.d.A. sei  $y_i \in V_i$ . Dann hat  $s_i = y_i$  keine Nachbarn außerhalb von  $V_i \cup S$  und somit ist  $s_i$  auch simplizial in  $G$ . ■

**Satz 2.31.** *Ein Graph ist genau dann chordal, wenn er eine PEO hat.*

*Beweis.* Falls  $G$  chordal ist, lässt sich eine PEO gemäß Lemma 2.30 bestimmen, indem wir für  $i = n, \dots, 2$  sukzessive einen simplizialen Knoten  $u_i$  in  $G - \{u_{i+1}, \dots, u_n\}$  wählen.

Für die umgekehrte Richtung sei  $(u_1, \dots, u_n)$  eine PEO von  $G$ . Wir zeigen induktiv, dass  $G_i = G[u_1, \dots, u_i]$  chordal ist. Da  $u_{i+1}$  simplizial in  $G_{i+1}$  ist, enthält jeder Kreis  $K$  der Länge  $\geq 4$  in  $G_{i+1}$ , auf dem  $u_{i+1}$  liegt, eine Sehne zwischen den beiden Kreisnachbarn von  $u_{i+1}$ . Daher ist mit  $G_i$  auch  $G_{i+1}$  chordal. ■

**Korollar 2.32.** *Es gibt einen Polynomialzeitalgorithmus  $A$ , der für einen gegebenen Graphen  $G$  eine PEO berechnet, falls  $G$  chordal ist, und andernfalls einen induzierten Kreis der Länge  $\geq 4$  ausgibt.*

*Beweis.*  $A$  versucht wie im Beweis von Theorem 2.31 beschrieben, eine PEO zu bestimmen. Stellt sich heraus, dass  $G_i = G - \{u_{i+1}, \dots, u_n\}$  keinen simplizialen Knoten  $u_i$  hat, so ist  $G_i$  wegen Lemma 2.30 nicht chordal. Daher gibt es in  $G_i$  nach Lemma 2.27 (iii) ein Knotenpaar  $x, y$ , so dass kein  $x$ - $y$ -Separator eine Clique ist. Berechnen wir für dieses Paar einen beliebigen minimalen  $x$ - $y$ -Separator  $S$ , so ist  $S$  keine Clique und wir können wie im Beweis von (i)  $\implies$  (ii) einen induzierten Kreis  $K$  der Länge  $\geq 4$  in  $G_i$  konstruieren. Da  $G_i$  ein induzierter Teilgraph von  $G$  ist, ist  $K$  auch ein induzierter Kreis in  $G$ . ■

Eine PEO kann verwendet werden, um einen chordalen Graphen zu färben:

---

#### Algorithmus chordal-color( $V, E$ )

---

- 1 berechne eine PEO  $(u_1, \dots, u_n)$  für  $G = (V, E)$
  - 2 starte greedy-color mit der Knotenfolge  $(u_1, \dots, u_n)$
- 

**Satz 2.33.** *Für einen gegebenen chordalen Graphen  $G = (V, E)$  berechnet der Algorithmus **chordal-color** eine  $k$ -Färbung  $c$  von  $G$  mit  $k = \chi(G) = \omega(G)$ .*

*Beweis.* Sei  $u_i$  ein beliebiger Knoten mit  $c(u_i) = k$ . Da  $(u_1, \dots, u_n)$  eine PEO von  $G$  ist, ist  $u_i$  simplizial in  $G[u_1, \dots, u_i]$ . Somit bilden die Nachbarn  $u_j$  von  $u_i$  mit  $j < i$  eine Clique und wegen  $c(u_i) = k$  bilden sie zusammen mit  $u_i$  eine  $k$ -Clique. Daher gilt  $\chi(G) \leq k \leq \omega(G)$ , woraus wegen  $\omega(G) \leq \chi(G)$  die Behauptung folgt. ■

Um **chordal-color** in Linearzeit zu implementieren, benötigen wir einen Linearzeit-Algorithmus zur Bestimmung einer PEO. Rose, Tarjan und Lueker haben 1976 einen solchen Algorithmus angegeben, der auf *lexikographischer Breitensuche* (kurz LexBFS oder LBFS, engl. *lexicographic breadth-first search*) basiert. Bevor wir diese Variante

der Breitensuche vorstellen, gehen wir kurz auf verschiedene Ansätze zum Durchsuchen von Graphen ein.

Der folgende Algorithmus **GraphSearch**( $V, E$ ) startet eine Suche in einem beliebigen Knoten  $u$  und findet zunächst alle von  $u$  aus erreichbaren Knoten. Danach wird solange von einem noch nicht erreichten Knoten eine neue Suche gestartet, bis alle Knoten erreicht wurden. Die Menge der aktuellen Knoten wird dabei in einer Datenstruktur  $A$  gespeichert. Genauer enthält  $A$  alle bereits entdeckten Knoten, die noch nicht abgearbeitet sind.

---

**Algorithmus** **GraphSearch**( $V, E$ )
 

---

```

1  $R := \emptyset$  // Menge der erreichten Knoten
2  $L := ()$  // Ausgabeliste
3 repeat
4   wähle  $u \in V \setminus R$  //  $u$  wurde neu entdeckt
5   append( $L, u$ )
6    $\text{parent}(u) := \perp$ 
7    $A := \{u\}$  // Menge der aktuellen Knoten
8    $R := R \cup \{u\}$ 
9   while  $A \neq \emptyset$  do
10    wähle  $u$  aus  $A$ 
11    if  $\exists v \in N(u) \setminus R$  then
12       $A := A \cup \{v\}$  //  $v$  wurde neu entdeckt
13       $R := R \cup \{v\}$ 
14      append( $L, v$ )
15       $\text{parent}(v) := u$ 
16    else entferne  $u$  aus  $A$  //  $u$  wurde abgearbeitet
17 until  $R = V$ 
18 return( $L$ )
  
```

---

Der Algorithmus **GraphSearch**( $V, E$ ) findet in jedem Durchlauf der repeat-Schleife eine neue Komponente des Eingabegraphen  $G = (V, E)$ . Dies bedeutet, dass alle Knoten, die zu einer Komponente gehören,

konsekutiv in der Ausgabeliste  $L = (u_1, \dots, u_n)$  auftreten, wobei abgesehen vom ersten Knoten jeder Komponente jeder Knoten  $u_k$  einen Nachbarn  $u_i$  mit  $i < k$  hat.

Die folgende Definition fasst diese Eigenschaften der Ausgabeliste zusammen.

**Definition 2.34.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine lineare Ordnung  $(u_1, \dots, u_n)$  auf  $V$  heißt **Suchordnung (SO)** von  $G$ , wenn für jedes Tripel  $j < k < l$  gilt:

$$u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i < k : i \neq j \wedge u_i \in N(u_k).$$

**Satz 2.35.** Für jeden Graphen  $G = (V, E)$  gibt der Algorithmus **GraphSearch**( $V, E$ ) eine SO von  $G$  aus.

*Beweis.* Ein Knoten  $u_k$  erhält nur dann den Wert  $\text{parent}(u_k) = \perp$ , wenn alle Knoten  $u_j$  mit  $j < k$  bereits abgearbeitet sind und diese nur Nachbarn  $u_l$  mit  $l < k$  hatten. Falls also ein Vorgänger  $u_j$  von  $u_k$  mit einem Nachfolger  $u_l$  von  $u_k$  verbunden ist, liefert die **parent**-Funktion einen Nachbarn  $u_i = \text{parent}(u_k)$  von  $u_k$  mit  $i < k$ . Da  $u_j \notin N(u_k)$  ist, gilt zusätzlich  $i \neq j$ . ■

Die **parent**-Funktion induziert einen gerichteten Wald  $W = (V, E_{\text{parent}})$ , dessen Kantenmenge aus allen Kanten der Form  $(\text{parent}(v), v)$  mit  $\text{parent}(v) \neq \perp$  besteht. Die Kanten von  $W$  werden auch als **Baumkanten** (kurz **B-Kanten**) und  $W$  wird auch als **Suchwald** von  $G = (V, E)$  bezeichnet. Für jeden Knoten  $v \in V$  gibt es genau eine Wurzel  $w$  in  $W$ , von der aus  $v$  in  $W$  erreichbar ist. Der eindeutig bestimmte  $w$ - $v$ -Pfad  $P = (u_0, \dots, u_l)$  in  $W$  mit  $u_0 = w$  und  $u_l = v$  lässt sich ausgehend von  $u_l = v$  unter Verwendung der **parent**-Funktion mittels  $u_{i-1} = \text{parent}(u_i)$  für  $i = l, \dots, 1$  berechnen.  $P$  wird auch als **parent-Pfad** von  $v$  bezeichnet. Es ist klar, dass 2 Knoten  $v$  und  $v'$  genau dann in einer Komponente von  $G$  liegen, wenn sie die gleiche Wurzel haben.

Realisieren wir die Menge der aktuellen Knoten als einen Keller  $S$ , so erhalten wir eine Suchstrategie, die als **Tiefensuche** (kurz *DFS*, engl. *depth first search*) bezeichnet wird. Die Benutzung eines Kellers bewirkt, dass nach der Entdeckung eines neuen Knotens  $v$  unter den Nachbarn des aktuellen Knotens  $u$  die Suche zuerst bei den Nachbarn von  $v$  fortgesetzt wird, bevor die anderen Nachbarn von  $u$  getestet werden.

---

**Algorithmus DFS( $V, E$ )**


---

```

1   $R := \emptyset$     // Menge der erreichten Knoten
2   $L := ()$       // Ausgabeliste
3  repeat
4    wähle  $u \in V \setminus R$     //  $u$  wurde neu entdeckt
5     $R := R \cup \{u\}$ 
6     $\text{append}(L, u)$ 
7     $\text{parent}(u) := \perp$ 
8     $S := (u)$     // Keller der aktuellen Knoten
9    while  $S \neq ()$  do
10      $u := \text{top}(S)$ 
11     if  $\exists v \in N(u) \setminus R$  then
12        $\text{push}(S, v)$     //  $v$  wurde neu entdeckt
13        $R := R \cup \{v\}$ 
14        $\text{append}(L, v)$ 
15        $\text{parent}(v) := u$ 
16     else  $\text{pop}(S)$     //  $u$  wurde abgearbeitet
17 until  $R = V$ 
18 return( $L$ )
```

---

**Definition 2.36.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine lineare Ordnung  $(u_1, \dots, u_n)$  auf  $V$  heißt **DFS-Ordnung (DO)** von  $G$ , wenn für jedes Tripel  $j < k < l$  gilt:

$$u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i : j < i < k \wedge u_i \in N(u_k).$$

**Satz 2.37.** Für jeden Graphen  $G = (V, E)$  gibt der Algorithmus  $\text{DFS}(V, E)$  eine DO von  $G$  aus.

*Beweis.* Siehe Übungen. ■

Realisieren wir die Menge der abzuarbeitenden Knoten als eine Warteschlange  $Q$ , so findet der resultierende Algorithmus  $\text{BFS}(V, E)$  einen kürzesten Weg vom Startknoten  $u$  zu allen von  $u$  aus erreichbaren Knoten. Diese Suchstrategie wird als **Breitensuche** (kurz *BFS*, engl. *breadth first search*) bezeichnet. Die Benutzung einer Warteschlange  $Q$  zur Speicherung der noch abzuarbeitenden Knoten bewirkt, dass alle Nachbarknoten  $v$  des aktuellen Knotens  $u$  vor den bisher noch nicht erreichten Nachbarn von  $v$  ausgegeben werden.

---

**Algorithmus BFS( $V, E$ )**


---

```

1   $R := \emptyset$     // Menge der erreichten Knoten
2   $L := ()$       // Ausgabeliste
3  repeat
4    wähle  $u \in V \setminus R$     //  $u$  wurde neu entdeckt
5     $R := R \cup \{u\}$ 
6     $\text{parent}(u) := \perp$ 
7     $Q := (u)$     // Warteschlange der aktuellen Knoten
8    while  $Q \neq ()$  do
9       $u := \text{dequeue}(Q)$     //  $u$  wird komplett abgearbeitet
10      $\text{append}(L, u)$ 
11     for all  $v \in N(u) \setminus R$  do
12        $\text{enqueue}(Q, v)$     //  $v$  wurde neu entdeckt
13        $\text{parent}(v) := u$ 
14      $R := R \cup N(u)$ 
15 until  $R = V$ 
16 return( $L$ )
```

---

**Definition 2.38.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine lineare Ordnung  $(u_1, \dots, u_n)$  auf  $V$  heißt **BFS-Ordnung (BO)** von  $G$ , wenn für jedes



Tripel  $j < k < l$  gilt:

$$u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i < j : u_i \in N(u_k).$$

**Satz 2.39.** Für jeden Graphen  $G = (V, E)$  gibt der Algorithmus **BFS**( $V, E$ ) eine BO von  $G$  aus.

*Beweis.* Existiert im Fall  $k < l$  eine Position  $j < k$  mit  $u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k)$ , so muss es einen Knoten  $u_i \in N(u_k)$  mit  $i < j$  geben, der dafür gesorgt hat, dass der Knoten  $u_k$  vor dem Knoten  $u_l$  in die Warteschlange aufgenommen wurde. ■

BFS-Ordnungen lassen sich anschaulich anhand der Adjazenzmatrix charakterisieren. Sei  $(u_1, \dots, u_n)$  eine BO für  $G = (V, E)$  und sei  $A = (a_{ij})$  die Adjazenzmatrix von  $G$  mit  $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{u_i, u_j\} \in E$ . Weiter seien  $z_i = a_{i1} \dots a_{i,i-1}$  die Präfixe der Zeilen von  $A$ , die unterhalb der Diagonale verlaufen. Sind nun die ersten  $j$  Einträge  $a_{k1} \dots a_{kj}$  einer Zeile  $s_k$  Null, so muss dies auch für jede Zeile  $s_l$  mit  $l > k$  so sein, da im Fall  $a_{lj} = 1$  der Knoten  $u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k)$  wäre und somit ein  $i < j$  mit  $a_{ki} = 1$  existieren müsste. Dies bedeutet, dass  $s_l$  mindestens so viele Nullen als Präfix hat wie  $z_k$ . Es ist aber möglich, dass  $z_k$  bspw. mit 00010... beginnt und  $z_l$  mit 00011....

Alternativ können wir  $Q$  auch als eine Warteschlange von Knotenmengen realisieren (siehe Algorithmus **BFS'**), um einen Überblick über alle möglichen Fortsetzungen der aktuellen Liste  $L$  zu einer BO zu erhalten. Die Prozedur **Dequeue**( $Q$ ) liefert ein beliebiges Element aus der ersten Menge in  $Q$  zurück und entfernt dieses aus  $Q$ .

#### Algorithmus **BFS'**( $V, E$ )

---

```

1   $R := \emptyset$     // Menge der erreichten Knoten
2   $L := ()$        // Ausgabeliste
3  repeat
4    wähle  $u \in V \setminus R$ 
5     $R := R \cup \{u\}$ 
```

```

6   $Q := (\{u\})$     // Warteschlange von Knotenmengen
7  while  $Q \neq ()$  do
8     $u := \text{Dequeue}(Q)$     //  $u$  wird komplett abgearbeitet
9    append( $L, u$ )
10   if  $N(u) \not\subseteq R$  then enqueue( $Q, N(u) \setminus R$ )
11    $R := R \cup N(u)$ 
12 until  $R = V$ 
13 return( $L$ )
```

---

#### Prozedur **Dequeue**( $Q$ )

---

```

1  entferne  $u$  aus  $\text{first}(Q)$ 
2  if  $\text{first}(Q) = \emptyset$  then dequeue( $Q$ )
3  return( $u$ )
```

---

Fassen wir die Menge  $V \setminus R$  der noch nicht erreichten Knoten als Nachfolgemenge der letzten Menge in  $Q$  auf, so wird von dieser Restmenge in jedem Durchlauf der **while**-Schleife von **BFS'** die Teilmenge  $N(u) \setminus R$  abgetrennt und im Fall  $N(u) \setminus R \neq \emptyset$  der Schlange  $Q$  hinzugefügt.

Der Unterschied von LexBFS zur normalen Breitensuche besteht darin, dass die zulässigen Ausgabefolgen gegenüber der BFS weiter eingeschränkt werden. Der Name von LexBFS rührt daher, dass die Knoten in einer Reihenfolge ausgegeben werden, die eine lexikographische Sortierung der Zeilenpräfixe  $z_i$  bewirkt, sofern man sie durch Anhängen von Einsen auf die gleiche Länge bringt. Eine solche Sortierung kann auch bei einer gewöhnlichen Breitensuche auftreten, ist bei dieser aber nicht garantiert. Bei einer Breitensuche werden die noch nicht besuchten Nachbarn des aktuellen Knotens in beliebiger Reihenfolge zur Warteschlange hinzugefügt und auch wieder in dieser Reihenfolge entfernt. Dagegen werden bei einer LexBFS die Knoten in der Warteschlange nachträglich umsortiert, falls dies notwendig ist, um eine LexBFS-Ordnung der Knoten zu erhalten (siehe Definition 2.40). Ähnlich wie bei **BFS'** wird hierzu die Menge der noch

nicht abgearbeiteten Knoten in eine Folge von Knotenmengen zerlegt. Im Gegensatz zu **BFS** kann **LexBFS** aber nicht nur die letzte Menge  $V \setminus R$  splitten, sondern alle Mengen der Folge.

---

**Algorithmus LexBFS** ( $V, E, u$ )
 

---

```

1  $L := ()$  // Ausgabeliste
2  $Q := (V)$  // Warteschlange von Knotenmengen
3 while  $Q \neq ()$  do
4    $u := \text{Dequeue}(Q)$  //  $u$  wird komplett abgearbeitet
5    $\text{append}(L, u)$ 
6    $\text{Splitqueue}(Q, N(u))$ 
7 return ( $L$ )
```

---



---

**Prozedur Splitqueue** ( $Q, S$ )
 

---

```

1 for  $T$  in  $Q$  with  $T \cap S \notin \{\emptyset, T\}$  do
2   ersetze die Teilfolge ( $T$ ) in  $Q$  durch  $(T \cap S, T \setminus S)$ 
```

---

Für eine effiziente Implementierung sollte die Schlange  $Q = (T_1, \dots, T_k)$  von Knotenmengen  $T_i \subseteq V$  als doppelt verkettete Liste realisiert werden und für jeden Knoten  $v$  in der Adjazenzliste ein Zeiger auf die Menge  $T_i$ , die  $v$  enthält und auf seinen Eintrag in  $T_i$  gespeichert werden. Zudem sollte die for-Schleife in der Prozedur **Splitqueue** durch eine Schleife über die Knoten  $v$  in der Adjazenzliste  $S = N(u)$  ersetzt werden.

**Definition 2.40.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine lineare Ordnung  $(u_1, \dots, u_n)$  auf  $V$  heißt **LexBFS-Ordnung (LBO)** von  $G$ , wenn für jedes Tripel  $j < k < l$  gilt:

$$u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i < j : u_i \in N(u_k) \setminus N(u_l).$$

Ob eine Ordnung  $(u_1, \dots, u_n)$  eine LBO ist, lässt sich wie folgt an der gemäß  $(u_1, \dots, u_n)$  geordneten Adjazenzmatrix  $A$  ablesen: die verkürzten Zeilen  $z_1, \dots, z_n$  unter der Diagonalen müssen im folgenden

Sinne lexikalisch sortiert sein: entweder ist  $z_i$  ein Präfix von  $z_{i+1}$  oder  $z_i$  hat an der ersten Position, wo sich die beiden Strings unterscheiden, eine Eins. Bringen wir also die verkürzten Zeilen durch Anhängen von Einsen auf dieselbe Länge, so sind sie lexikographisch sortiert. Man erhält sogar eine lexikographische Ordnung auf den *kompletten* Zeilen von  $A$ , falls man die Diagonale auf 1 setzt und die Knoten in jeder Menge von  $Q$  nach absteigendem Knotengrad in  $G$  sortiert.

**Satz 2.41.** Für jeden Graphen  $G = (V, E)$  gibt der Algorithmus **LexBFS** ( $V, E$ ) eine LBO  $(u_1, \dots, u_n)$  von  $G$  aus.

*Beweis.* Sei  $A = (a_{ij})$  die Adjazenzmatrix von  $G$  mit  $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{u_i, u_j\} \in E$ . Wir zeigen, dass  $(u_1, \dots, u_n)$  eine LBO ist. Existiert nämlich im Fall  $k < l$  eine Position  $j < k$  mit  $a_{kj} = 0$  und  $a_{lj} = 1$ , so muss es eine Position  $i < j$  mit  $a_{ki} = 1$  und  $a_{li} = 0$  geben. Ansonsten wäre der Knoten  $u_l$  spätestens beim Abarbeiten von  $u_j$  in eine Menge vor dem Knoten  $u_k$  sortiert worden und könnte daher nicht nach dem Knoten  $u_k$  ausgegeben werden. ■

**Satz 2.42.** Jede LBO für einen chordalen Graphen  $G$  ist eine PEO für  $G$ .

*Beweis.* Sei  $(u_1, \dots, u_n)$  eine LBO für  $G = (V, E)$  und sei  $A = (a_{ij})$  die Adjazenzmatrix von  $G$  mit  $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{u_i, u_j\} \in E$ , wobei wir für  $a_{ij}$  auch  $A[i, j]$  schreiben. Wir zeigen, dass  $G$  nicht chordal ist, wenn  $u_i$  nicht simplizial in  $G_i = G[u_1, \dots, u_i]$  ist.

Falls  $u_i$  nicht simplizial in  $G_i$  ist, müssen Indizes  $i_2 < i_1 < i =: i_0$  mit  $A[i_0, i_1] = A[i_0, i_2] = 1$  und  $A[i_1, i_2] = 0$  existieren. Wegen  $A[i_1, i_2] = 0$  und  $A[i_0, i_2] = 1$  muss es einen Index  $i_3 < i_2$  geben mit  $A[i_1, i_3] = 1$  und  $A[i_0, i_3] = 0$ , wobei wir  $i_3$  möglichst klein wählen.

Falls nun  $A[i_2, i_3] = 1$  ist, haben wir einen induzierten Kreis  $G[u_{i_0}, u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}] = (u_{i_0}, u_{i_1}, u_{i_3}, u_{i_2})$  der Länge 4 in  $G$  gefunden. Andernfalls muss es wegen  $A[i_2, i_3] = 0$  und  $A[i_1, i_3] = 1$  einen Index

$i_4 < i_3$  geben mit  $A[i_2, i_4] = 1$  und  $A[i_1, i_4] = 0$ , wobei wir  $i_4$  wieder möglichst klein wählen. Da spätestens für  $i_k = 1$  kein Index  $i_{k+1} < i_k$  existiert, also  $A[i_{k-1}, i_k] = 1$  sein muss, erhalten wir eine Indexfolge  $1 \leq i_k < \dots < i_1 < i_0$  mit

- (a)  $A[i_0, i_1] = A[i_j, i_{j+2}] = A[i_{k-1}, i_k] = 1$  für  $j = 0, \dots, k-2$  und
- (b)  $A[i_0, i_3] = A[i_j, i_{j+1}] = A[i_j, i_{j+3}] = A[i_{k-2}, i_{k-1}] = 0$  für  $j = 1, \dots, k-3$  und
- (c)  $A[i_j, l] = A[i_{j-1}, l]$  für  $j = 1, \dots, k-3$  und  $l < i_{j+2}$ .

Die Eigenschaften (a) und (b) ergeben sich direkt aus der Konstruktion der Folge. Eigenschaft (c) folgt aus der minimalen Wahl der Indizes  $i_3, \dots, i_k$  und impliziert für  $r = 4, \dots, k$  die Gleichungen  $A[i_0, i_r] = A[i_1, i_r] = \dots = A[i_{r-3}, i_r]$ , indem wir  $j = 1, \dots, r-3$  und  $l = i_r$  setzen. Da zudem  $A[i_{r-3}, i_r]$  gemäß Eigenschaft (b) für  $r = 3, \dots, k$  den Wert 0 hat, folgt für alle Paare  $0 \leq j < r \leq k$  die Äquivalenz

$$A[i_j, i_r] = 1 \Leftrightarrow r = j + 2 \text{ oder } j = 0 \wedge r = 1 \text{ oder } j = k - 1 \wedge r = k.$$

Folglich ist  $G[u_{i_0}, \dots, u_{i_k}]$  ein Kreis der Länge  $k + 1 \geq 4$ . ■

Damit haben wir einen Linearzeitalgorithmus, der für chordale Graphen eine PEO berechnet. Da auch **greedy-color** linear zeitbeschränkt ist, können wir den Algorithmus **chordal-color** in Linearzeit implementieren. Diesen Algorithmus können wir leicht noch so modifizieren, dass er zusammen mit der gefundenen  $k$ -Färbung entweder eine Clique  $C$  der Größe  $k$  (als Zertifikat, dass  $\chi(G) = k = \omega(G)$  ist) oder einen induzierten Kreis der Länge  $\geq 4$  (als Zertifikat, dass  $G$  nicht chordal ist) ausgibt.

## 2.3 Der Satz von Brooks

**Satz 2.43** (Brooks 1941). *Für einen zusammenhängenden Graphen  $G$  gilt  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$  genau dann, wenn  $G = K_n$  für ein  $n \geq 1$*

*oder  $G = C_n$  für ein ungerades  $n \geq 3$  ist.*

*Beweis.* Es ist klar, dass die Graphen  $G = K_n$  für  $n \geq 1$  und  $G = C_n$  für ungerades  $n \geq 3$  die chromatische Zahl  $\Delta(G) + 1$  haben.

Um zu zeigen, dass dies die einzigen zusammenhängenden Graphen mit  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$  sind, betrachten wir verschiedene Fälle.

Falls  $G$  nicht regulär ist, können wir ausgehend von einem Knoten  $u_1$  vom Grad  $\deg_G(u_1) < \Delta(G)$  eine Suchordnung  $(u_1, \dots, u_n)$  berechnen und  $G$  greedy in der umgekehrten Reihenfolge  $(u_n, \dots, u_1)$   $\Delta(G)$ -färben. Dies ist möglich, da jeder Knoten  $u_i$  mit  $i \geq 2$  zum Zeitpunkt der Berechnung von  $c(u_i)$  noch einen ungefärbten Nachbar  $\text{parent}(u_i)$  und  $u_1$  einen Grad  $\deg_G(u_1) < \Delta(G)$  hat.

Falls  $G$  regulär, aber nicht 2-zusammenhängend ist, berechnen wir  $\Delta(G)$ -Färbungen  $c_i$  für die einzelnen Blöcke  $B_i$  von  $G$ . Dies ist möglich, da jeder Block  $B_i$  mindestens einen Schnittknoten enthält und daher höchstens für ein  $k < \Delta(G)$   $k$ -regulär ist. Die Färbungen  $c_i$  lassen sich ausgehend von einem beliebigen Wurzelblock des BC-Baums hin zu den Blattblöcken in eine  $\Delta(G)$ -Färbung  $c$  für  $G$  transformieren. Hierzu müssen wir lediglich die Farben im aktuellen Block  $B_i$  so umbenennen, dass der Schnittknoten, der  $B_i$  mit seinem Elternblock verbindet, die vorgegebene Farbe erhält.

Es bleibt also der Fall, dass  $G$   $d$ -regulär und  $\kappa(G) \geq 2$  ist. Der Fall  $d = 2$  ist klar, da  $G$  ein Kreis sein muss. Für den Fall  $d \geq 3$  benutzen wir folgende Behauptung.

**Behauptung 2.44.** *Sei  $d \geq 3$  und sei  $G \neq K_n$  ein  $d$ -regulär Graph mit  $\kappa(G) \geq 2$ . Dann gibt es in  $G$  einen Knoten  $u_1$ , der zwei nicht-adjazente Nachbarn  $a$  und  $b$  hat, so dass  $G - \{a, b\}$  zusammenhängend ist.*

Da  $G \neq K_n$  ist, gibt es einen Knoten  $x$ , der zwei Nachbarn  $y, z \in N(x)$  mit  $\{y, z\} \notin E$  hat.

- Falls  $G - y$  2-zusammenhängend ist, ist  $G - \{y, z\}$  zusammenhängend und die Behauptung folgt für  $u_1 = x$ .
- Ist  $G - y$  nicht 2-zusammenhängend, d.h.  $G - y$  hat mindestens zwei Blöcke, dann hat der BC-Baum  $T$  von  $G - y$  mindestens zwei Blätter. Da  $\kappa(G) \geq 2$  ist, ist  $y$  in  $G$  zu mindestens einem Knoten in jedem Blatt von  $T$  benachbart, der kein Schnittknoten ist. Wählen wir für  $a$  und  $b$  zwei dieser Knoten in verschiedenen Blättern, so ist  $G - \{a, b\}$  zusammenhängend und somit die Behauptung für  $u_1 = y$  bewiesen.

Sei also  $u_1$  ein Knoten, der zwei Nachbarn  $a$  und  $b$  mit  $\{a, b\} \notin E$  hat, so dass  $G - \{a, b\}$  zusammenhängend ist. Durchsuchen wir den Graphen  $G - \{a, b\}$  ausgehend vom Startknoten  $u_1$ , so erhalten wir eine Suchordnung  $(u_1, \dots, u_{n-2})$ . Starten wir nun **greedy-color** mit der Reihenfolge  $(a, b, u_{n-2}, \dots, u_1)$ , so erhalten wir eine  $d$ -Färbung  $c$  für  $G$  mit  $c(a) = c(b) = 1$ . Zudem hat Knoten  $u_i$ ,  $i > 1$ , einen Nachbarn  $u_j$  mit  $j < i$ , weshalb  $c(u_i) \leq \deg(u_i) \leq d$  ist. Zuletzt erhält auch  $u_1$  eine Farbe  $c(u_1) \leq d$ , da die Nachbarn  $a$  und  $b$  von  $u_1$  dieselbe Farbe haben. ■

## 2.4 Kantenfärbungen

Neben der Frage, mit wievielen Farben die Knoten eines Graphen gefärbt werden können, muss bei vielen Anwendungen auch eine Kantenfärbung mit möglichst wenigen Farben gefunden werden.

**Definition 2.45.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und sei  $k \in \mathbb{N}$ .

- Eine Abbildung  $c: E \rightarrow \mathbb{N}$  heißt **Kantenfärbung** von  $G$ , wenn  $c(e) \neq c(e')$  für alle  $e \neq e' \in E$  mit  $e \cap e' \neq \emptyset$  gilt.
- $G$  heißt  **$k$ -kantenfärbbar**, falls eine Kantenfärbung  $c: E \rightarrow \{1, \dots, k\}$  existiert.
- Die **kantenchromatische Zahl** oder der **chromatische Index** von  $G$  ist

$$\chi'(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-kantenfärbbar}\}.$$

Eine  $k$ -Kantenfärbung  $c: E \rightarrow \mathbb{N}$  muss also zwei Kanten, die einen Knoten gemeinsam haben, verschiedene Farben zuweisen. Daher bildet jede **Farbklasse**  $E_i = \{e \in E \mid f(e) = i\}$  ein Matching von  $G$ , d.h.  $c$  zerlegt  $E$  in  $k$  disjunkte Matchings. Umgekehrt liefert jede Zerlegung von  $E$  in  $k$  disjunkte Matchings eine  $k$ -Kantenfärbung von  $G$ .

Neben Graphen treten in manchen Anwendungen auch **Multigraphen**  $G = (V, E)$  auf. Diese können mehr als eine Kante zwischen zwei Knoten haben, d.h.  $E$  ist eine Multimenge auf  $\binom{V}{2}$ .

Eine **Multimenge**  $A$  auf einer Grundmenge  $M$  lässt sich durch eine Funktion  $v_A: M \rightarrow \mathbb{N}$  beschreiben, wobei  $v_A(a)$  die Anzahl der Vorkommen des Elements  $a$  in  $A$  angibt. Die Mächtigkeit von  $A$  ist  $|A| = \sum_{a \in A} v_A(a)$ .

Wie bei Graphen gehen wir davon aus, dass jede Kante  $e = \{u, v\}$  eines Multigraphen  $G = (V, E)$  zwei verschiedene Endpunkte  $u \neq v$  hat, d.h.  $G$  ist schlingenfrei. In  $G$  gibt es genau  $v_E(e) = v_E(u, v)$  Kanten zwischen den beiden Knoten  $u$  und  $v$ . Die Zahl  $v_E(e)$  wird auch als **(Kanten-)Vielfachheit** von  $e$  bezeichnet. Ein wichtiger Parameter von Multigraphen ist die maximale Kantenvielfachheit

$$v(G) = \max_{e \in E} v_E(e),$$

die auch als **(Graph-)Vielfachheit** von  $G$  bezeichnet wird. Der **Grad** eines Knotens  $u \in V$  ist  $\deg_G(u) = \sum_{v \in N(u)} v_E(u, v)$  und der **Maximalgrad** von  $G$  ist wie üblich  $\Delta(G) = \max_{u \in V} \deg_G(u)$ .

Eine  $k$ -Kantenfärbung für einen Multigraphen  $G = (V, E)$  lässt sich durch eine Funktion  $c$  beschreiben, die jeder Kante  $e \in \binom{V}{2}$  eine Menge  $c(e) \subseteq \{1, \dots, k\}$  von  $|c(e)| = v_E(e)$  Farben zuordnet, so dass  $c(e) \cap c(e') = \emptyset$  für alle  $e \neq e' \in \binom{V}{2}$  mit  $e \cap e' \neq \emptyset$  gilt.

**Beispiel 2.46.**

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade,} \\ 3, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\chi'(K_n) = 2\lceil n/2 \rceil - 1 = \begin{cases} n-1, & n \text{ gerade,} \\ n, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Kantenfärbungsproblem für einen Graphen  $G$  lässt sich leicht auf das Knotenfärbungsproblem für einen Graphen  $G'$  reduzieren.

**Definition 2.47.** Sei  $G' = (V, E')$  ein Graph mit  $m \geq 1$  Kanten. Dann heißt der Graph  $G = L(G') = (E', E)$  mit

$$E = \left\{ \{e, e'\} \in \binom{E'}{2} \mid e \cap e' \neq \emptyset \right\}$$

der **Kantengraph** oder **Line-Graph** von  $G'$ .

Ist  $G'$  ein Multigraph, so verwenden wir als Knotenmenge von  $L(G')$  eine Menge  $V_{E'}$  mit der Mächtigkeit  $|V_{E'}| = |E'|$ , die  $v_{E'}(e)$  verschiedene Kopien  $e^1, \dots, e^{v_{E'}(e)}$  jeder Kante  $e \in E'$  enthält. Die folgenden Beziehungen zwischen einem (Multi-)Graphen  $G'$  und dem zugehörigen Line-Graphen lassen sich leicht verifizieren.

**Proposition 2.48.** Für den Line-Graphen  $G' = (V', E') = L(G)$  eines Multigraphen  $G = (V, E)$  gilt:

- (i)  $n(G') = m(G)$ ,
- (ii)  $\chi(G') = \chi'(G)$ ,
- (iii)  $\alpha(G') = \mu(G)$ ,
- (iv)  $\omega(G') \geq \Delta(G)$ ,
- (v) Für jede Kante  $e = \{u, v\} \in E$  gilt  $\deg_{G'}(e) = \deg_G(u) + \deg_G(v) - v_E(e) - 1$  und somit ist  $\Delta(G') \leq 2\Delta(G) - 2$ .

Damit erhalten wir aus den Abschätzungen  $\omega(G') \leq \chi(G') \leq \Delta(G') + 1$  und  $n/\alpha(G') \leq \chi(G') \leq n - \alpha(G') + 1$  die folgenden Abschätzungen für  $\chi'(G)$ .

**Lemma 2.49.** Für jeden Multigraphen  $G$  mit  $m \geq 1$  Kanten gilt  $\Delta \leq \chi' \leq 2\Delta - 1$  und  $m/\mu \leq \chi' \leq m - \mu + 1$ .

**Korollar 2.50.** Für jeden regulären Multigraphen mit einer ungeraden Knotenzahl und  $m \geq 1$  Kanten gilt  $\chi' \geq \Delta + 1 \geq 3$ .

*Beweis.* Wegen  $\mu \leq (n-1)/2$  und  $m = n\Delta/2$  folgt  $\chi' \geq m/\mu \geq n\Delta/(n-1) > \Delta$ . Da  $n$  ungerade und  $m \geq 1$  ist, folgt  $\Delta \geq 2$ . ■

Als nächstes geben wir einen effizienten Algorithmus an, der für jeden Graphen eine  $(\Delta + 1)$ -Kantenfärbung berechnet. Hierfür benötigen wir folgende Begriffe.

**Definition 2.51.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und sei  $c: E \rightarrow \{1, \dots, k\}$  eine  $k$ -Kantenfärbung von  $G$ . Weiter sei  $F \subseteq \{1, \dots, k\}$  und es gelte  $1 \leq i \neq j \leq k$ .

- a) Ein Nachbar  $v$  von  $u$  heißt  **$F$ -Nachbar** von  $u$ , wenn  $c(u, v) \in F$  ist. Im Fall  $F = \{i\}$  nennen wir  $v$  auch den  **$i$ -Nachbarn** von  $u$ .
- b) Die Farbe  $i$  ist **frei** an einem Knoten  $u$  (kurz  $i \in \text{free}(u)$ ), falls  $u$  keinen  $i$ -Nachbarn hat.
- c) Der Graph  $G_{ij} = (V, E_{ij})$  mit  $E_{ij} = \{e \in E \mid c(e) \in \{i, j\}\}$  heißt  **$(i, j)$ -Subgraph** von  $G$ .
- d) Jede Komponente  $K$  von  $G_{ij}$  heißt  **$(i, j)$ -Komponente** von  $G$ . Je nachdem ob  $K$  ein Pfad oder ein Kreis ist, nennen wir  $K$  auch einen  **$(i, j)$ -Pfad** bzw.  **$(i, j)$ -Kreis** in  $G$  (bzgl. c).

Man sieht leicht, dass jede  $(i, j)$ -Komponente  $K$  von  $G$  entweder ein Pfad der Länge  $l \geq 0$  oder ein Kreis gerader Länge ist. Zudem können wir aus  $c$  eine weitere  $k$ -Kantenfärbung  $c'$  von  $G$  gewinnen, indem wir die beiden Farben  $i$  und  $j$  entlang der Kanten von  $K$  vertauschen.

**Satz 2.52** (Vizing 1964). Für jeden Graphen  $G$  gilt  $\chi'(G) \leq \min_{e \in E} \Delta(G - e) + 1 \leq \Delta(G) + 1$ .

*Beweis.* Wir führen Induktion über  $m$ . Der IA  $m = 0$  ist klar. Für den IS sei  $G' = (V, E')$  ein Graph mit  $m + 1$  Kanten und sei  $k = \min_{e \in E'} \Delta(G' - e) + 1$ . Wir wählen eine beliebige Kante  $e_1 = \{y_0, y_1\} \in E'$ , so dass der Graph  $G = G' - e_1$  den Maximalgrad  $\Delta(G) = k - 1$  hat. Dann hat  $G$  nach IV eine  $k$ -Kantenfärbung  $c: E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ . Da zudem unter  $c$  an jedem Knoten  $u$  mindestens  $k - \deg_G(u) \geq 1$  Farben frei sind, folgt  $\text{free}(u) \neq \emptyset$  für alle  $u \in V$ . Betrachte nun folgende Prozeduren.

---

**Prozedur expand**( $G, c, y_0, y_1$ )

---

```

1   $\ell := 1$ 
2  wähle  $\alpha_1 \in \text{free}(y_1)$ 
3  while  $\alpha_\ell \notin \text{free}(y_0) \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell-1}\}$  do
4    sei  $y_{\ell+1}$  der  $\alpha_\ell$ -Nachbar von  $y_0$ 
5    wähle  $\alpha_{\ell+1} \in \text{free}(y_{\ell+1})$ 
6     $\ell := \ell + 1$ 
7  wähle  $0 \leq i < \ell$  minimal mit  $\alpha_\ell \in \text{free}(y_0) \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_i\}$ 
8  if  $i = 0$  then //  $\alpha_\ell \in \text{free}(y_0)$ 
9    recolor( $\ell, \alpha_\ell$ )
10 else //  $\alpha_\ell = \alpha_i$ 
11   wähle eine Farbe  $\alpha_0 \in \text{free}(y_0)$ 
12   berechne den  $(\alpha_0, \alpha_i)$ -Pfad  $P$  mit Startknoten  $y_\ell$  und
13   vertausche dabei die Farben  $\alpha_0$  und  $\alpha_i$  entlang  $P$ 
14   sei  $z$  der Endknoten von  $P$  //  $z = y_\ell$  ist möglich
15   case
16      $z = y_0$ : recolor( $i, \alpha_i$ )
17      $z = y_i$ : recolor( $i, \alpha_0$ )
18   else recolor( $\ell, \alpha_0$ )
19 return  $c$ 

```

---



---

**Prozedur recolor**( $i, \alpha$ )

---

```

1  for  $j := 1$  to  $i - 1$  do  $c(y_0, y_j) := \alpha_j$ 
2   $c(y_0, y_i) := \alpha$ 

```

---

Wir verifizieren, dass die Abbildung  $c$  eine Kantenfärbung von  $G'$  ist.

**Fall 1**  $i = 0$ : Da die Farbe  $\alpha_\ell$  an  $y_0$  und die Farbe  $\alpha_j$  für  $j = 1, \dots, \ell$  an  $y_j$  frei ist, kann **recolor**( $\ell, \alpha_\ell$ ) die Kanten  $\{y_0, y_j\}$  mit  $\alpha_j$  färben.

**Fall 2**  $i > 0 \wedge z = y_0$ : In diesem Fall erreicht  $P$  den Knoten  $z = y_0$  über die Kante  $\{y_0, y_{i+1}\}$ . Nach dem Vertauschen von  $\alpha_0$  und  $\alpha_i$  entlang  $P$  hat diese Kante dann die Farbe  $\alpha_0$ , weshalb **recolor**( $i, \alpha_i$ ) die Kanten  $\{y_0, y_j\}$  für  $j = 1, \dots, i$  mit  $\alpha_j$  färben kann.

**Fall 3**  $i > 0 \wedge z = y_i$ : Da  $\alpha_i \in \text{free}(y_i) \cap \text{free}(y_\ell)$  ist, müssen die Endkanten von  $P$  mit  $\alpha_0$  gefärbt sein. Nach Vertauschen von  $\alpha_0$  und  $\alpha_i$  entlang  $P$  ist daher die Farbe  $\alpha_0$  an  $y_0$  und  $y_i$  frei, weshalb **recolor**( $i, \alpha_0$ ) die Kanten  $\{y_0, y_j\}$  für  $j = 1, \dots, i - 1$  mit  $\alpha_j$  und die Kante  $\{y_0, y_i\}$  mit  $\alpha_0$  färben kann.

**Fall 4**  $i > 0 \wedge z \notin \{y_0, y_i\}$ : Da die Farbe  $\alpha_0$  durch Vertauschen von  $\alpha_0$  und  $\alpha_i$  entlang  $P$  an  $y_\ell$  frei wird und zudem die Farbe  $\alpha_j$  für  $j = 0, \dots, \ell - 1$  wegen  $z \notin \{y_0, y_i\}$  und  $\alpha_j \notin \{\alpha_0, \alpha_i\}$  für  $j \notin \{0, i\}$  an  $y_j$  frei bleibt, kann **recolor**( $\ell, \alpha_0$ ) die Kanten  $\{y_0, y_j\}$  für  $j = 1, \dots, \ell - 1$  mit  $\alpha_j$  und die Kante  $\{y_0, y_\ell\}$  mit  $\alpha_0$  färben. ■

Da die Prozedur **expand** mit Hilfe geeigneter Datenstrukturen so implementiert werden kann, dass jeder Aufruf Zeit  $\mathcal{O}(n)$  erfordert, und diese Prozedur  $m$ -mal aufgerufen wird, um alle  $m$  Kanten eines gegebenen Graphen  $G$  zu färben, ergibt sich eine Gesamtlaufzeit von  $\mathcal{O}(nm)$ .

Für einen Graphen  $G$  kann  $\chi'(G)$  nur einen der beiden Werte  $\Delta(G)$  oder  $\Delta(G) + 1$  annehmen. Graphen  $G$  mit  $\chi'(G) = \Delta(G)$  heißen **Klasse 1** und Graphen  $G$  mit  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$  heißen **Klasse 2**.

Neben den vollständigen Graphen  $K_n$  mit gerader Knotenzahl  $n$  sind alle Graphen  $G$  mit  $\Delta(G) \leq 1$  und alle bipartiten Graphen Klasse 1.

Zudem sind alle planaren Graphen  $G$  mit  $\Delta(G) \geq 7$  Klasse 1. Für  $2 \leq d \leq 5$  existieren planare Graphen  $G$  mit  $\Delta(G) = d$ , die Klasse 2 sind. Für  $d = 6$  ist dies offen.

Das Problem, für einen gegebenen Graphen  $G$  zu entscheiden, ob er Klasse 1 ist (also  $\chi'(G) \leq \Delta(G)$  gilt), ist NP-vollständig.

Der Satz von Vizing lässt sich wie folgt auf Multigraphen verallgemeinern.

**Satz 2.53** (Vizing 1964). *Für jeden Multigraphen  $G = (V, E)$  gilt  $\chi'(G) \leq \max_{u,v \in V} (\deg(u) + v_E(u, v)) \leq \Delta(G) + v(G)$ .*

*Beweis.* Der Beweis folgt derselben Argumentation wie bei einfachen Graphen. Wir müssen nur die Prozeduren **expand** und **recolor** entsprechend anpassen.

**Prozedur multiexpand**( $G, c, y_0, y_1$ )

---

```

1   $\ell := 1; Y := \{y_1\}$ 
2  wähle  $\alpha_1 \in \text{free}(y_1); \text{used}(y_1) := \{\alpha_1\}$ 
3  while  $\alpha_\ell \notin \text{free}(y_0) \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell-1}\}$  do
4    sei  $y_{\ell+1}$  der  $\alpha_\ell$ -Nachbar von  $y_0$ ;
5    if  $y_{\ell+1} \notin Y$  then  $Y := Y \cup \{y_{\ell+1}\}; \text{used}(y_{\ell+1}) := \emptyset$ 
6    wähle  $\alpha_{\ell+1} \in \text{free}(y_{\ell+1}) \setminus \text{used}(y_{\ell+1})$ 
7     $\text{used}(y_{\ell+1}) := \text{used}(y_{\ell+1}) \cup \{\alpha_{\ell+1}\}$ 
8     $\ell := \ell + 1$ 
9  wähle  $0 \leq i < \ell$  minimal mit  $\alpha_\ell \in \text{free}(y_0) \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_i\}$ 
10 if  $i = 0$  then //  $\alpha_\ell \in \text{free}(y_0)$ 
11   multirecolor( $\ell, \alpha_\ell$ )
12 else //  $\alpha_\ell = \alpha_i$  für ein  $i \geq 1$ 
13   wähle eine Farbe  $\alpha_0 \in \text{free}(y_0)$ 
14   berechne den  $(\alpha_0, \alpha_i)$ -Pfad  $P$  mit Startknoten  $y_\ell$  und
15   vertausche dabei die Farben  $\alpha_0$  und  $\alpha_i$  entlang  $P$ 
16   sei  $z$  der Endknoten von  $P$  //  $z = y_\ell$  ist möglich
17   case
18      $z = y_0$ : multirecolor( $i, \alpha_i$ )
```

```

19      $z = y_i$ : multirecolor( $i, \alpha_0$ )
20   else multirecolor( $\ell, \alpha_0$ )
```

---

**Prozedur multirecolor**( $i, \alpha$ )

---

```

1  for  $j := 1$  to  $i - 1$  do  $c(y_0, y_j) := (c(y_0, y_j) \setminus \{\alpha_{j-1}\}) \cup \{\alpha_j\}$ 
2   $c(y_0, y_i) := (c(y_0, y_i) \setminus \{\alpha_{i-1}\}) \cup \{\alpha\}$ 
```

---

■

In den Übungen zeigen wir noch folgende Schranken.

**Korollar 2.54.** *Sei  $G$  ein Multigraph. Dann gilt*

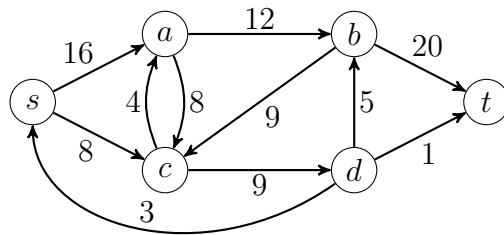
- (i)  $\chi'(G) \leq 3\Delta(G)/2$  und
- (ii)  $\chi'(G) = \Delta(G)$ , falls  $G$  bipartit (also  $\chi(G) \leq 2$ ) ist.

Man beachte, dass für jeden Multigraphen die Ungleichungen  $\Delta(G) \leq \Delta(G) + v(G) \leq 2\Delta(G)$  gelten.

### 3 Flüsse in Netzwerken

**Definition 3.1.** Ein **Netzwerk**  $N = (V, E, s, t, c)$  besteht aus einem gerichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit einer **Quelle**  $s \in V$  und einer **Senke**  $t \in V$  sowie einer **Kapazitätsfunktion**  $c : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$ . Zudem muss jede Kante  $(u, v) \in E$  positive Kapazität  $c(u, v) > 0$  und jede Nichtkante  $(u, v) \notin E$  muss die Kapazität  $c(u, v) = 0$  haben.

**Beispiel 3.2.** Die Abbildung zeigt ein Netzwerk  $N$ :



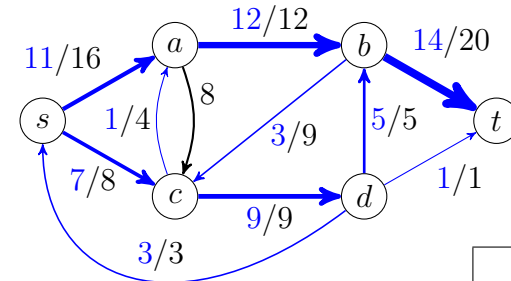
**Definition 3.3.**

- a) Ein **Fluss** in  $N$  ist eine Funktion  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}$  mit
- $f(u, v) \leq c(u, v)$ , (Kapazitätsbedingung)
  - $f(u, v) = -f(v, u)$  und (Antisymmetrie)
  - $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$  für alle  $u \in V \setminus \{s, t\}$ . (Kontinuität)
- b) Die **Größe** von  $f$  ist  $|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$ .
- c) Der **Fluss in den Knoten**  $u$  ist  $f^-(u) = \sum_{v \in V} \max\{0, f(v, u)\}$ .
- d) Der **Fluss aus**  $u$  ist  $f^+(u) = \sum_{v \in V} \max\{0, f(u, v)\}$ .

Die Antisymmetrie impliziert, dass  $f(u, u) = 0$  für alle  $u \in V$  gilt und  $|f| = f^+(s) - f^-(s)$  ist. Wir können also annehmen, dass  $c(u, u) = 0$

für alle Knoten  $u \in V$  gilt und somit  $G$  schlingenfrei ist. Die Kontinuität besagt, dass  $f^+(u) = f^-(u)$  für alle Knoten  $u \in V \setminus \{s, t\}$  gilt.

**Beispiel 3.4** (Fortsetzung). Die Abbildung zeigt einen Fluss  $f$  der Größe  $|f| = \sum_{v \in V} f(u, v) = 11 + 7 - 3 = 15$  in  $N$ :



$u$	$s$	$a$	$b$	$c$	$d$	$t$
$f^+(u)$	18	12	17	10	9	0
$f^-(u)$	3	12	17	10	9	15

#### 3.1 Der Ford-Fulkerson-Algorithmus

Wie kann man für einen Fluss  $f$  in einem Netzwerk  $N$  entscheiden, ob er vergrößert werden kann? Diese Frage ist leicht zu beantworten, falls  $f$  auf  $V \times V$  den Wert 0 hat: In diesem Fall genügt es, in  $G = (V, E)$  einen Pfad von  $s$  nach  $t$  zu finden. Andernfalls können wir zu  $N$  und  $f$  ein Netzwerk  $N_f$  konstruieren, so dass  $f$  genau dann vergrößert werden kann, wenn sich in  $N_f$  der Nullfluss vergrößern lässt.

**Definition 3.5.** Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk und sei  $f$  ein Fluss in  $N$ . Das zugeordnete **Restnetzwerk** ist  $N_f = (V, E_f, s, t, c_f)$  mit den Kapazitäten

$$c_f(e) = c(e) - f(e)$$

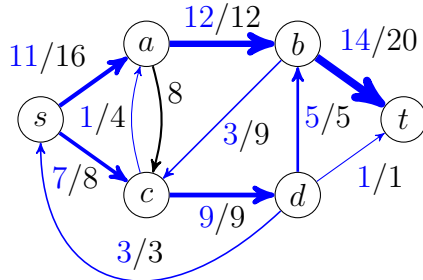
für alle  $e \in V \times V$  und der Kantenmenge

$$E_f = \{e \in V \times V \mid c_f(e) > 0\}.$$

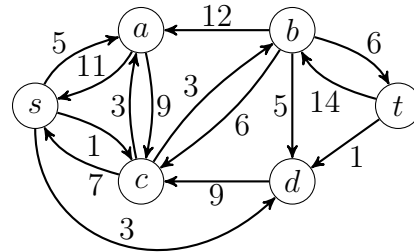


**Beispiel 3.6** (Fortsetzung). Der Fluss  $f$  führt auf folgendes Restnetzwerk  $N_f$  für  $N$ :

**Fluss  $f$  in  $N$ :**



**Restnetzwerk  $N_f$ :**



◁

**Definition 3.7.** Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk. Dann heißt jeder  $s$ - $t$ -Pfad  $P$  in  $(V, E)$  **Zunahmepfad in  $N$** . Die **Kapazität von  $P$  in  $N$**  ist

$$c(P) = \min\{c(u, v) \mid (u, v) \text{ liegt auf } P\}$$

und der **Fluss durch  $P$  in  $N$**  ist

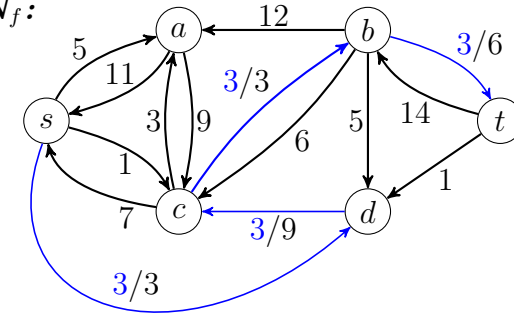
$$f_P(u, v) = \begin{cases} c(P), & (u, v) \text{ liegt auf } P, \\ -c(P), & (v, u) \text{ liegt auf } P, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, dass  $f_P$  tatsächlich ein Fluss in  $N$  ist.  $P = (u_0, \dots, u_k)$  ist also genau dann ein Zunahmepfad in  $N_f$ , falls

- $u_0 = s$  und  $u_k = t$  ist,
- die Knoten  $u_0, \dots, u_k$  paarweise verschieden sind
- und  $c(u_i, u_{i+1}) > 0$  für  $i = 0, \dots, k-1$  gilt.

**Beispiel 3.8** (Fortsetzung). Die Abbildung zeigt den zum Zunahmepfad  $P = (s, d, c, b, t)$  gehörigen Fluss  $f_P$  im Restnetzwerk  $N_f$ :

**Fluss  $f_P$  in  $N_f$ :**

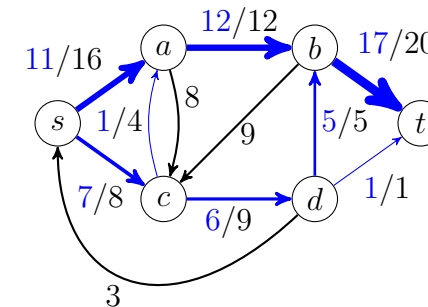


Die Kapazität von  $P$  in  $N_f$  ist  $c_f(P) = 3$ . ▷

Durch Addition der beiden Flüsse  $f$  und  $f_P$  erhalten wir einen Fluss  $f' = f + f_P$  in  $N$  der Größe  $|f'| = |f| + |f_P| = |f| + c_f(P) > |f|$ .

**Beispiel 3.9** (Fortsetzung). Durch Addition von  $f$  und  $f_P$  erhalten wir folgenden Fluss  $f'$  in  $N$ :

**Fluss  $f' = f + f_P$  in  $N$ :**



Nun können wir den **Ford-Fulkerson-Algorithmus** angeben.

**Algorithmus Ford-Fulkerson**( $V, E, s, t, c$ )

---

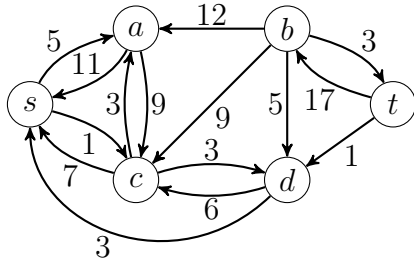
```

1  for all  $(u, v) \in E \cup E^R$  do
2       $f(u, v) := 0$ 
3  while es gibt einen Zunahmepfad  $P$  in  $N_f$  do
4       $f := f + f_P$ 

```

---

**Beispiel 3.10** (Fortsetzung). Für den neuen Fluss  $f'$  erhalten wir nun folgendes Restnetzwerk  $N_{f'}$ :



In diesem existiert kein Zunahmepfad mehr.  $\triangleleft$

Um zu zeigen, dass der Algorithmus von Ford-Fulkerson tatsächlich einen Maximalfluss berechnet, weisen wir nach, dass  $f$  ein Fluss maximaler Größe in  $N$  ist, wenn im Restnetzwerk  $N_f$  kein Zunahmepfad existiert. Hierzu benötigen wir den Begriff des Schnitts.

**Definition 3.11.** Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk. Eine Menge  $S$  mit  $\emptyset \subsetneq S \subsetneq V$  heißt **Schnitt** durch  $N$ . Der zugehörige **Kantenschnitt** ist  $E(S) = \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \notin S\}$  (dieser wird oft auch einfach als **Schnitt** bezeichnet). Die **Kapazität eines Schnittes**  $S$  ist

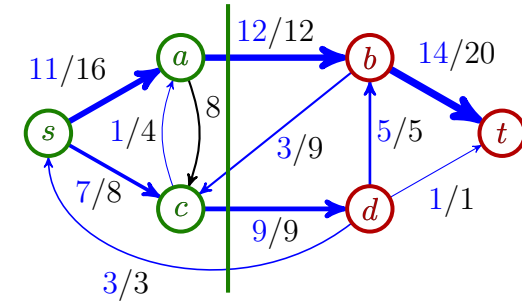
$$c(S) = \sum_{e \in E(S)} c(e).$$

Ist  $f$  ein Fluss in  $N$ , so heißt

$$f(S) = \sum_{e \in E(S)} f(e)$$

der **Nettofluss** (oder einfach **Fluss**) durch den Schnitt  $S$ . Ist  $u \in S$  und  $v \notin S$ , so wird  $S$  auch als  **$u$ - $v$ -Schnitt** bezeichnet.

**Beispiel 3.12.** Betrachte folgenden Schnitt  $S = \{s, a, c\}$  durch das Netzwerk  $N$  mit dem Fluss  $f$ :



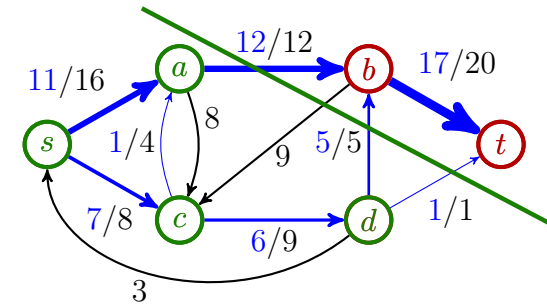
Dieser Schnitt hat die Kapazität

$$c(S) = c(a, b) + c(c, d) = 12 + 9 = 21$$

und der Fluss  $f$  durch ihn ist

$$\begin{aligned} f(S) &= f(a, b) + f(c, b) + f(c, d) + f(s, d) \\ &= 12 - 3 + 9 - 3 \\ &= 15. \end{aligned}$$

Dagegen hat der Schnitt  $S' = \{s, a, c, d\}$



die Kapazität

$$c(S') = c(a, b) + c(d, b) + c(d, t) = 12 + 5 + 1 = 18$$

die mit dem Fluss

$$f(S') = f(a, b) + f(d, b) + f(d, t) = 12 + 5 + 1 = 18$$

durch ihn übereinstimmt.  $\triangleleft$

**Lemma 3.13.** Für jeden Fluss  $f$  in einem Netzwerk  $N$  und jeden  $s$ - $t$ -Schnitt  $S$  durch  $N$  gilt

$$|f| = f(S) \leq c(S).$$

*Beweis.* Wir zeigen zuerst die Ungleichung  $f(S) \leq c(S)$ . Wegen  $f(e) \leq c(e)$  für alle  $e \in V \times V$  gilt

$$f(S) = \sum_{e \in E(S)} f(e) \leq \sum_{e \in E(S)} c(e) = c(S).$$

Die Gleichheit  $|f| = f(S)$  zeigen wir durch Induktion über  $k = |S|$ .

**$k=1$  (IA):** In diesem Fall ist  $S = \{s\}$  und wegen  $f(s, s) = 0$  folgt

$$|f| = \sum_v f(s, v) = \sum_{v \neq s} f(s, v) = f(S).$$

**$k \rightsquigarrow k+1$  (IS):** Sei  $S$  ein  $s$ - $t$ -Schnitt mit  $|S| = k > 1$  und sei  $w \in S - \{s\}$ . Für den Schnitt  $S' = S - \{w\}$  gilt dann nach IV  $|f| = f(S')$ . Wegen  $S = S' \cup \{w\}$  folgt dann

$$f(S) = \sum_{u \in S, v \notin S} f(u, v) = \sum_{u \in S', v \notin S} f(u, v) + \sum_{v \notin S} f(w, v)$$

und wegen  $V \setminus S' = (V \setminus S) \cup \{w\}$  folgt

$$f(S') = \sum_{u \in S', v \notin S'} f(u, v) = \sum_{u \in S', v \notin S} f(u, v) + \sum_{u \in S'} f(u, w).$$

Daher erhalten wir

$$f(S) - f(S') = \sum_{v \notin S} f(w, v) - \sum_{u \in S'} \underbrace{f(u, w)}_{=-f(w, u)} = \sum_{v \neq w} f(w, v) = 0$$

und somit  $f(S) = f(S') = |f|$ . ■

**Satz 3.14** (Max-Flow-Min-Cut-Theorem). Für einen Fluss  $f$  in einem Netzwerk  $N = (V, E, s, t, c)$  sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $f$  ist maximal, d.h. für jeden Fluss  $f'$  in  $N$  gilt  $|f'| \leq |f|$ .
2. Im Restnetzwerk  $N_f$  existiert kein Zunahmepfad.
3. Es gibt einen  $s$ - $t$ -Schnitt  $S$  durch  $N$  mit  $c(S) = |f|$ .

*Beweis.* Die Implikation  $1 \Rightarrow 2$  ist klar, da die Existenz eines Zunahmepfads in  $N_f$  zu einer Vergrößerung von  $f$  führen würde.

Für die Implikation  $2 \Rightarrow 3$  betrachten wir den Schnitt

$$S = \{u \in V \mid u \text{ ist in } N_f \text{ von } s \text{ aus erreichbar}\}.$$

Dann gilt  $t \notin S$  (da in  $N_f$  kein Zunahmepfad existiert) und für alle Kanten  $e = (u, v) \in E(S)$  ist  $c_f(e) = c(e) - f(e) = 0$  (sonst wäre mit  $u$  auch  $v$  in  $S$  enthalten). Daher folgt

$$|f| = f(S) = \sum_{e \in E(S)} f(e) = \sum_{e \in E(S)} c(e) = c(S).$$

Die Implikation  $3 \Rightarrow 1$  folgt direkt aus obigem Lemma, da jeder Fluss  $f'$  in  $N$  im Fall  $c(S) = |f|$  einen Wert  $|f'| = f'(S) \leq c(S) = |f|$  hat. ■

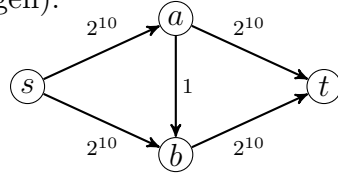
Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem gilt auch für Netzwerke mit beliebigen reellen Kapazitäten  $c(e) \geq 0$ .

Sei  $c_0 = c(S)$  die Kapazität des Schnittes  $S = \{s\}$ . Dann durchläuft der Ford-Fulkerson-Algorithmus die while-Schleife höchstens  $c_0$ -mal, da sich der aktuelle Fluss in jedem Durchlauf um mindestens 1 erhöht. Bei jedem Durchlauf ist zuerst das Restnetzwerk  $N_f$  und danach ein Zunahmepfad in  $N_f$  zu berechnen.

- Die Berechnung des Zunahmepfads  $P$  kann durch Breitensuche in Zeit  $\mathcal{O}(n + m)$  erfolgen.
- Da sich das Restnetzwerk nur entlang von  $P$  ändert, kann es in Zeit  $\mathcal{O}(n)$  aktualisiert werden.

Jeder Durchlauf benötigt also Zeit  $\mathcal{O}(n+m)$ , was auf eine Gesamtlaufzeit von  $\mathcal{O}(c_0(n+m))$  führt. Da der Wert von  $c_0$  jedoch exponentiell in der Länge der Eingabe (also der Beschreibung des Netzwerkes  $N$ ) sein kann, ergibt dies keine polynomiell beschränkte Laufzeit. Bei Netzwerken mit reellen Kapazitäten kann der Ford-Fulkerson-Algorithmus sogar unendlich lange laufen (siehe Übungen).

Bei nebenstehendem Netzwerk benötigt Ford-Fulkerson zur Bestimmung des Maximalflusses abhängig von der Wahl der Zunahmepfade zwischen 2 und  $2^{11}$  Schleifendurchläufe.



- Im günstigsten Fall wird nämlich ausgehend vom Nullfluss  $f_0$  zuerst der Zunahmepfad  $P_1 = (s, a, t)$  mit der Kapazität  $2^{10}$  und dann im Restnetzwerk  $N_{f_1}$  der Pfad  $P_2 = (s, b, t)$  mit der Kapazität  $2^{10}$  gewählt.
- Im ungünstigsten Fall werden abwechselnd die beiden Zunahmepfade  $P_1 = (s, a, b, t)$  und  $P_2 = (s, b, a, t)$  (also  $P_i = P_1$  für ungerades  $i$  und  $P_i = P_2$  für gerades  $i$ ) mit der Kapazität 1 gewählt. Dies führt auf insgesamt  $2^{11}$  Schleifendurchläufe (siehe nebenstehende Tabelle).

Nicht nur in diesem Beispiel lässt sich die exponentielle Laufzeit wie folgt vermeiden:

- Man betrachtet nur Zunahmepfade mit einer geeignet gewählten Mindestkapazität. Dies führt auf eine Laufzeit, die polynomiell in  $n$ ,  $m$  und  $\log c_0$  ist.
- Man bestimmt in jeder Iteration einen kürzesten Zunahmepfad im Restnetzwerk mittels Breitensuche in Zeit  $\mathcal{O}(n+m)$ . Diese Vorgehensweise führt auf den *Edmonds-Karp-Algorithmus*, der eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(nm^2)$  hat (unabhängig von der Kapazitätsfunktion).
- Man bestimmt in jeder Iteration einen Fluss  $g$  im Restnetzwerk  $N_f$ , der nur Kanten benutzt, die auf einem kürzesten  $s$ - $t$ -Pfad in  $N_f$  liegen. Zudem hat  $g$  die Eigenschaft, dass  $g$  auf jedem kürzesten

$i$	Fluss $f_{P_i}$ in $N_{f_i}$	neuer Fluss $f_{i+1}$ in $N$
1		
2		
⋮		
$2j-1, 1 < j \leq 2^{10}$		
$2j, 1 < j < 2^{10}$		
⋮		
$2^{11}$		

$s$ - $t$ -Pfad  $P$  mindestens eine Kante  $e \in P$  *sättigt* (d.h. der Fluss  $g(e)$  durch  $e$  schöpft die Restkapazität  $c_f(e)$  von  $e$  vollkommen aus), weshalb diese Kante in der nächsten Iteration fehlt. Dies führt auf den *Algorithmus von Dinitz*. Da die Länge der kürzesten  $s$ - $t$ -Pfade im Restnetzwerk in jeder Iteration um mindestens eins zunimmt, liegt nach spätestens  $n - 1$  Iterationen ein maximaler Fluss vor. Dinitz hat gezeigt, dass der Fluss  $g$  in Zeit  $\mathcal{O}(nm)$  bestimmt werden kann. Folglich hat der Algorithmus von Dinitz eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(n^2m)$ .

- Malhotra, Kumar und Maheswari fanden später einen  $\mathcal{O}(n^2)$ -Algorithmus zur Bestimmung von  $g$ . Damit kann die Gesamtlaufzeit auf  $\mathcal{O}(n^3)$  verbessert werden.

### 3.2 Der Edmonds-Karp-Algorithmus

Der Edmonds-Karp-Algorithmus ist eine spezielle Form von Ford-Fulkerson, die möglichst kurze Zunahmepfade benutzt. Diese können mittels Breitensuche bestimmt werden.

**Algorithmus** Edmonds-Karp( $V, E, s, t, c$ )

---

```

1  for all  $(u, v) \in E \cup E^R$  do
2     $f(u, v) := 0$ 
3  while  $P := \text{zunahmepfad}(f) \neq \perp$  do
4    addierepfad( $f, P$ )
```

---

**Prozedur** zunahmepfad( $f$ )

---

```

1  for all  $v \in V \setminus \{s\}$  do
2     $\text{parent}(v) := \perp$ 
3   $\text{parent}(s) := s$ 
4   $Q := (s)$ 
5  while  $Q \neq () \wedge \text{parent}(t) = \perp$  do
6     $u := \text{dequeue}(Q)$ 
```

---

```

7  for all  $e = (u, v) \in E \cup E^R$  do
8    if  $c(e) - f(e) > 0 \wedge \text{parent}(v) = \perp$  then
9       $c'(e) := c(e) - f(e)$ 
10      $\text{parent}(v) := u$ 
11     enqueue( $Q, v$ )
12  if  $\text{parent}(t) = \perp$  then
13     $P := \perp$ 
14  else
15     $P := \text{parent-Pfad von } s \text{ nach } t$ 
16     $c_f(P) := \min\{c'(e) \mid e \in P\}$ 
17  return  $P$ 
```

---

**Prozedur** addierepfad( $f, P$ )

---

```

1  for all  $e \in P$  do
2     $f(e) := f(e) + c_f(P)$ 
3     $f(e^R) := f(e^R) - c_f(P)$ 
```

---

Die Prozedur **zunahmepfad**( $f$ ) berechnet im Restnetzwerk  $N_f$  einen (gerichteten)  $s$ - $t$ -Pfad  $P$ , sofern ein solcher existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn die while-Schleife mit **parent**( $t$ )  $\neq \perp$  abbricht. Der gefundene Zunahmepfad  $P = (u_\ell, \dots, u_0)$  lässt sich dann ausgehend von  $u_0 = t$  mittels **parent** zurückverfolgen:

$$u_i = \begin{cases} t, & i = 0, \\ \text{parent}(u_{i-1}), & i > 0 \text{ und } u_{i-1} \neq s \end{cases}$$

wobei  $\ell = \min\{i \geq 1 \mid u_i = s\}$  ist. Dann ist  $u_\ell = s$  und  $P$  ein  $s$ - $t$ -Pfad, den wir als den **parent-Pfad** von  $s$  nach  $t$  bezeichnen.

**Satz 3.15.** *Der Edmonds-Karp-Algorithmus durchläuft die while-Schleife höchstens  $(nm/2)$ -mal und hat somit eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(nm^2)$ .*

*Beweis.* Sei  $k$  die Anzahl der Schleifendurchläufe und seien  $P_1, \dots, P_k$  die Zunahmepfade, die der Algorithmus bei Eingabe  $N$  berechnet,

d.h.  $f_{i+1} = f_i + f_{P_{i+1}}$ , wobei  $f_0$  der triviale Nullfluss und  $P_{i+1}$  der im Restnetzwerk  $N_{f_i}$  berechnete Zunahmepfad ist. Eine Kante  $e$  auf  $P_{i+1}$  heißt **kritisch** für  $P_{i+1}$ , falls der Fluss  $f_{P_{i+1}}$  durch  $P_{i+1}$  in  $N_{f_i}$  die Kante  $e$  **sättigt**, d.h.  $f_{P_{i+1}}(e) = c_{f_i}(e)$ . Eine kritische Kante  $e$  für  $P_{i+1}$  ist wegen

$$c_{f_{i+1}}(e) = c(e) - f_{i+1}(e) = c(e) - (f_i + f_{P_{i+1}})(e) = c_{f_i}(e) - f_{P_{i+1}}(e) = 0$$

nicht in  $N_{f_{i+1}}$  enthalten, wohl aber die Kante  $e^R$ , da  $c_{f_{i+1}}(e^R) = c(e^R) - f_{i+1}(e^R) = c(e^R) + f_{i+1}(e) = c(e^R) + c(e) > 0$  ist.

Sei  $d_i(u, v)$  die minimale Länge eines Pfades von  $u$  nach  $v$  im Restnetzwerk  $N_{f_i}$  und sei  $\ell_{i+1} = d_i(s, t)$  die Länge von  $P_{i+1}$ . Wir zeigen zuerst, dass die Abstände jedes Knotens  $u \in V$  von  $s$  und von  $t$  beim Übergang von  $N_{f_i}$  zu  $N_{f_{i+1}}$  höchstens zu- aber nicht abnehmen. Hierzu beweisen wir für jeden kürzesten Pfad  $P = (u_0, \dots, u_\ell)$  von  $u_0 = s$  nach  $u_\ell = t$  in  $N_{f_{i+1}}$  (d.h.  $d_{i+1}(s, u) = \ell$ ) die Ungleichungen

$$d_i(s, u_h) \leq d_i(s, u_{h-1}) + 1 \text{ für } h = 1, \dots, \ell,$$

die  $d_i(s, u) \leq \ell$  implizieren. Falls die Kante  $e = (u_{h-1}, u_h)$  auch in  $N_{f_i}$  enthalten ist, ist nichts zu zeigen. Andernfalls muss  $f_{i+1}(e) \neq f_i(e)$  sein, d.h.  $e$  oder  $e^R$  müssen auf  $P_{i+1}$  liegen. Da  $e$  nicht in  $N_{f_i}$  ist, muss  $e^R = (u_h, u_{h-1})$  auf  $P_{i+1}$  liegen. Da  $P_{i+1}$  ein kürzester Pfad von  $s$  nach  $t$  in  $N_{f_i}$  ist, folgt  $d_i(s, u_{h-1}) = d_i(s, u_h) + 1$ , was  $d_i(s, u_h) = d_i(s, u_{h-1}) - 1 \leq d_i(s, u_{h-1}) + 1$  impliziert. Vollkommen analog lässt sich  $d_i(u, t) \leq d_{i+1}(u, t)$  zeigen, womit wir folgende Behauptung bewiesen haben.

**Behauptung 3.16.** Für jeden Knoten  $u \in V$  gilt  $d_i(s, u) \leq d_{i+1}(s, u)$  und  $d_i(u, t) \leq d_{i+1}(u, t)$ .

Daraus ergibt sich nun folgende Behauptung.

**Behauptung 3.17.** Falls  $e = (u, v)$  in  $P_{i+1}$  und  $e^R = (v, u)$  in  $P_{j+1}$  für  $0 \leq i < j < k$  enthalten ist, so gilt  $\ell_{j+1} = d_j(s, t) \geq d_i(s, t) + 2 = \ell_{i+1} + 2$ .

Da  $P_{i+1}$  und  $P_{j+1}$  kürzeste  $s$ - $t$ -Pfade in  $N_{f_i}$  bzw.  $N_{f_j}$  sind, folgt dies direkt aus obiger Behauptung:

$$d_j(s, t) = \underbrace{d_j(s, v)}_{\geq d_i(s, v)} + \underbrace{d_j(v, t)}_{\geq d_i(v, t)} + 1 \geq \underbrace{d_i(s, v)}_{d_i(s, u)+1} + \underbrace{d_i(v, t)}_{d_i(v, t)+1} + 1 = d_i(s, t) + 2.$$

Da jeder Zunahmepfad  $P_i$  mindestens eine kritische Kante enthält und  $E \cup E^R$  höchstens  $m$  Kantenpaare der Form  $\{e, e^R\}$  enthält, impliziert schließlich folgende Behauptung, dass  $k \leq mn/2$  ist.

**Behauptung 3.18.** Zwei Kanten  $e$  und  $e^R$  sind zusammen höchstens  $n/2$ -mal kritisch.

Seien  $P_{i_1}, \dots, P_{i_h}$  mit  $1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq k$  die Pfade, für die eine der Kanten in  $\{e, e^R\}$  kritisch ist. Falls  $e' \in \{e, e^R\}$  kritisch für  $P_{i_j}$  mit  $1 \leq j < h$  ist, dann fehlt  $e'$  im Restnetzwerk  $N_{f_{i_j}}$ . Daher kann  $e'$  nur dann eine kritische Kante auf dem Pfad  $P_{i_{j+1}}$  sein, wenn  $e'^R$  auf einem Pfad  $P_i$  mit  $i_j < i \leq i_{j+1}$  liegt. Dies gilt natürlich erst recht, wenn die Kante  $e'^R$  auf  $P_{i_{j+1}}$  kritisch ist. Mit Behauptung 1 und Behauptung 2 folgt also  $\ell_{i_{j+1}} \geq \ell_i \geq \ell_{i_j} + 2$ . Daher ist

$$n - 1 \geq \ell_{i_h} \geq \ell_{i_1} + 2(h - 1) \geq 1 + 2(h - 1) = 2h - 1,$$

was  $h \leq n/2$  impliziert. ■

Man beachte, dass der Beweis auch bei Netzwerken mit reellen Kapazitäten seine Gültigkeit behält.

### 3.3 Der Algorithmus von Dinitz

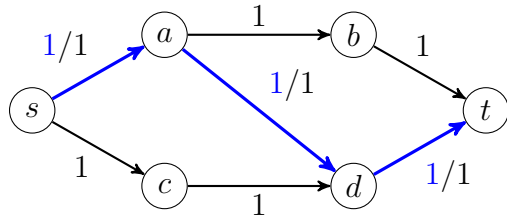
Man kann zeigen, dass sich in jedem Netzwerk ein maximaler Fluss durch Addition von höchstens  $m$  Zunahmepfaden konstruieren lässt (siehe Übungen). Es ist nicht bekannt, ob sich solche Pfade in Zeit  $O(m)$  bestimmen lassen. Wenn ja, würde dies auf eine Gesamtlaufzeit von  $O(m^2)$  führen. Für dichte Netzwerke (d.h.  $m = \Theta(n^2)$ ) hat der

Algorithmus von Dinitz die gleiche Laufzeit  $O(n^2m) = O(n^4)$  und die verbesserte Version ist mit  $O(n^3)$  in diesem Fall sogar noch schneller. Die Analyse der Laufzeit des Edmonds-Karp-Algorithmus beruht auf der Tatsache, dass der Fluss  $f_{P_{i+1}}$  durch den Zunahmepfad  $P_{i+1}$ , der in jedem Schleifendurchlauf auf den aktuellen Fluss  $f_i$  addiert wird, eine Kante auf *mindestens einem* kürzesten Pfad im Restnetzwerk  $N_{f_i}$  sättigt. Dies hat zur Folge, dass nicht mehr als  $nm/2$  Zunahmepfade  $P_i$  benötigt werden, um einen maximalen Fluss zu erhalten.

Dagegen addiert der Algorithmus von Dinitz in jedem Schleifendurchlauf auf den aktuellen Fluss  $f$  einen Fluss  $g$ , der auf *jedem* kürzesten Pfad im Restnetzwerk  $N_f$  mindestens eine Kante sättigt. Wir werden sehen, dass maximal  $n - 1$  solche Flüsse  $g_i$  benötigt werden.

**Definition 3.19.** Ein Fluss  $g$  in einem Netzwerk  $N = (V, E, s, t, c)$  **sättigt** eine Kante  $e \in E$ , falls  $g(e) = c(e)$  ist.  $g$  heißt **blockierend**, falls  $g$  mindestens eine Kante auf jedem Pfad  $P$  von  $s$  nach  $t$  sättigt.

Nach dem Max-Flow-Min-Cut-Theorem gibt es zu jedem maximalen Fluss  $f$  einen  $s$ - $t$ -Schnitt  $S$ , so dass alle Kanten in  $E(S)$  gesättigt sind. Da jeder Pfad von  $s$  nach  $t$  mindestens eine Kante in  $E(S)$  enthalten muss, ist jeder maximale Fluss auch blockierend. Für die Umkehrung gibt es jedoch einfache Gegenbeispiele, wie etwa



Ein blockierender Fluss muss also nicht unbedingt maximal sein. Tatsächlich ist  $g$  genau dann ein blockierender Fluss in  $N$ , wenn es im Restnetzwerk  $N_g$  keinen Zunahmepfad gibt, der nur aus *Vorwärtskanten*  $e \in E$  mit  $g(e) < c(e)$  besteht.

Der Algorithmus von Dinitz berechnet anstelle eines kürzesten Zunahmepfades  $P$  im aktuellen Restnetzwerk  $N_f$  einen blockierenden Fluss  $g$  im Schichtnetzwerk  $N'_f$ . Dieses enthält nur diejenigen Kanten von  $N_f$ , die auf einem kürzesten Pfad mit Startknoten  $s$  liegen. Zudem werden aus  $N'_f$  alle Knoten  $u \neq t$  entfernt, die einen Abstand  $d(s, u) \geq d(s, t)$  in  $N_f$  haben. Der Name rührt daher, dass jeder Knoten in  $N'_f$  einer Schicht  $S_j$  zugeordnet wird.

**Definition 3.20.** Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk und bezeichne  $d(x, y)$  die Länge eines kürzesten Pfades von  $x$  nach  $y$  in  $N$ . Das zugeordnete **Schichtnetzwerk** ist  $N' = (V', E', s, t, c')$  mit der Knotenmenge  $V' = S_0 \cup \dots \cup S_\ell$  und der Kantenmenge

$$E' = \bigcup_{j=1}^{\ell} \{(u, v) \in E \mid u \in S_{j-1} \wedge v \in S_j\}$$

sowie der Kapazitätsfunktion

$$c'(e) = \begin{cases} c(e), & e \in E', \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $\ell = 1 + \max\{d(s, u) < d(s, t) \mid u \in V\}$  und

$$S_j = \begin{cases} \{u \in V \mid d(s, u) = j\}, & 0 \leq j \leq \ell - 1, \\ \{t\}, & j = \ell \end{cases}$$

ist.

Der Algorithmus von Dinitz arbeitet wie folgt.

**Algorithmus Dinitz**( $N$ ),  $N = (V, E, s, t, c)$

---

```

1  for all  $(u, v) \in E \cup E^R$  do
2     $f(u, v) := 0$ 
3  while  $S := \text{schichtnetzwerk}(N, f) \neq \perp$  do
4     $f := f + \text{blockfluss}(S)$ 

```

---

Das zum Restnetzwerk  $N_f = (V, E_f, s, t, c_f)$  gehörige Schichtnetzwerk  $S = N'_f = (V', E'_f, s, t, c'_f)$  wird von der Prozedur **schichtnetzwerk**( $N, f$ ) in Zeit  $O(n + m)$  berechnet. Für die Berechnung eines blockierenden Flusses  $g$  in einem Schichtnetzwerk  $S$  werden wir zwei Algorithmen angeben: Eine Prozedur **blockfluss1**, deren Laufzeit durch  $O(nm)$  und eine Prozedur **blockfluss2**, deren Laufzeit durch  $O(n^2)$  beschränkt ist.

Wir beschreiben zuerst die Prozedur **schichtnetzwerk**. Diese Prozedur führt in  $N_f$  eine modifizierte Breitensuche mit Startknoten  $s$  durch und speichert dabei in der Menge  $E'$  nicht nur alle Baumkanten, sondern zusätzlich alle Querkanten  $(u, v)$  (d.h.  $u$  und  $v$  liegen nicht auf einem gemeinsamen parent-Pfad), die auf einem kürzesten Weg von  $s$  zu  $v$  liegen. Die Suche bricht ab, sobald  $t$  am Kopf der Schlange erscheint oder alle von  $s$  aus erreichbaren Knoten abgearbeitet sind. Falls  $t$  erreicht wurde, werden außer der Senke  $t$  alle Knoten  $u$ , die in  $N_f$  einen Abstand  $d(s, u) < d(s, t)$  von der Quelle  $s$  haben, in der Menge  $V'$  zusammengefasst. Zudem werden alle Kanten aus  $E'$  wieder entfernt, die nicht zwischen zwei Knoten aus  $V'$  verlaufen.

Wurde dagegen  $t$  nicht erreicht, so existiert in  $N_f$  (und damit in  $N'_f$ ) kein (blockierender) Fluss  $g$  mit  $|g| > 0$  und somit auch kein Zunahmepfad in  $N_f$ , d.h.  $f$  ist maximal.

---

**Prozedur schichtnetzwerk**( $N, f$ )

---

```

1   $E' := \emptyset$ 
2  for all  $v \in V$  do  $\text{niv}(v) := n$ 
3   $\text{niv}(s) := 0$ ;  $Q := (s)$ 
4  while  $Q \neq () \wedge \text{head}(Q) \neq t$  do
5     $u := \text{dequeue}(Q)$ 
6    for all  $e = (u, v) \in E \cup E^R$  do
7      if  $c(e) - f(e) > 0 \wedge \text{niv}(v) > \text{niv}(u)$  then
8         $E' := E' \cup \{e\}$ 
9         $c'(e) := c(e) - f(e)$ 
10     if  $\text{niv}(v) > \text{niv}(u) + 1$  then
```

```

11        $\text{niv}(v) := \text{niv}(u) + 1$ 
12        $\text{enqueue}(Q, v)$ 
13   if  $\text{head}(Q) = t$  then
14      $V' := \{v \in V \mid \text{niv}(v) < \text{niv}(t)\} \cup \{t\}$ 
15      $E' := E' \cap (V' \times V')$ 
16     return  $(V', E', s, t, c')$ 
17   else return  $\perp$ 
```

---

Die Laufzeitschranke  $O(n + m)$  für die Prozedur **schichtnetzwerk** folgt aus der Tatsache, dass jede Kante in  $E \cup E^R$  höchstens einmal besucht wird und jeder Besuch mit einem konstanten Zeitaufwand verbunden ist.

Nun kommen wir zur Beschreibung der Prozedur **blockfluss1**, die einen blockierenden Fluss  $g$  in einem gegebenen Schichtnetzwerk  $S = (V, E, s, t, c)$  berechnet. Beginnend mit dem Nullfluss  $g$  bestimmt diese in der repeat-Schleife mittels Tiefensuche

- einen  $s$ - $t$ -Pfad  $P$  in  $S$ ,
- addiert den Fluss  $f_P$  durch  $P$  in  $S$  zum aktuellen Fluss  $g$  hinzu,
- aktualisiert die Kapazitäten aller Kanten auf dem Pfad  $P$  und
- entfernt aus  $S$  die von  $g$  gesättigten Kanten.

Der Pfad  $P$  lässt sich hierbei direkt aus dem Inhalt des Kellers  $K$  rekonstruieren, weshalb er ***K-Pfad*** genannt wird. Man beachte, dass die Kapazitäten der auf dem gefundenen Pfad  $P$  liegenden Kanten nur in Vorwärtsrichtung, aber anders als bei Ford-Fulkerson und Edmonds-Karp nicht auch in Rückwärtsrichtung angepasst werden.

Falls die Tiefensuche in einem Knoten  $u \neq s$  in einer Sackgasse endet (weil  $E$  keine von  $u$  aus weiterführenden Kanten enthält), wird die zuletzt besuchte Kante  $(u', u)$  ebenfalls aus  $E$  entfernt und die Tiefensuche vom Startpunkt  $u'$  dieser Kante fortgesetzt (backtracking). Die Prozedur **blockfluss1** bricht ab, sobald alle Kanten mit Startknoten  $s$  aus  $E$  entfernt wurden und somit in  $(V, E)$  keine Pfade mehr von  $s$  nach  $t$  existieren (d.h.  $g$  ist ein blockierender Fluss in  $S$ ).



**Prozedur** `blockfluss1`( $S$ ),  $S = (V, E, s, t, c)$

---

```

1  for all  $e \in E \cup E^R$  do  $g(e) := 0$ 
2   $u := s$ 
3   $K := (s)$ 
4  done  $:= \text{false}$ 
5  repeat
6    if  $\exists e = (u, v) \in E$  then
7      push( $K, v$ )
8       $u := v$ 
9    elsif  $u = t$  then
10      $P := K$ -Pfad von  $s$  nach  $t$ 
11      $c(P) := \min\{c(e) \mid e \in P\}$ 
12     for all  $e \in P$  do
13        $g(e) := g(e) + c(P)$ 
14        $g(e^R) := -g(e)$ 
15        $c(e) := c(e) - c(P)$ 
16       if  $c(e) = 0$  then  $E := E \setminus \{e\}$ 
17        $K := (s)$ 
18        $u := s$ 
19     elsif  $u \neq s$  then  $\backslash\backslash$  backtracking
20       pop( $K$ )
21        $u' := \text{top}(K)$ 
22        $E := E \setminus \{(u', u)\}$ 
23        $u := u'$ 
24     else done  $:= \text{true}$ 
25  until done
26  return  $g$ 

```

---

Die Laufzeitschranke  $O(nm)$  folgt aus der Tatsache, dass sich die Anzahl der aus  $E$  entfernten Kanten nach spätestens  $n$  Schleifendurchläufen um 1 erhöht.

**Satz 3.21.** *Der Algorithmus von Dinitz durchläuft die while-Schleife höchstens  $(n - 1)$ -mal.*

*Beweis.* Sei  $f_0$  der Nullfluss in  $N$  und seien  $g_1, \dots, g_k$  die blockierenden Flüsse, die der Dinitz-Algorithmus der Reihe nach berechnet, d.h.  $f_{i+1} = f_i + g_{i+1}$ . Zudem sei  $d_i(u, v)$  die minimale Länge eines Pfades von  $u$  nach  $v$  im Restnetzwerk  $N_{f_i}$  und sei  $\delta_i = d_i(s, t)$ . Wir zeigen, dass  $\delta_i < \delta_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, k - 1$  gilt. Da  $\delta_1 \geq 1$  und  $\delta_k \leq n - 1$  ist, folgt  $k \leq n - 1$ .

Hierzu beweisen wir zunächst, dass für jeden kürzesten Pfad  $P = (u_0, \dots, u_l)$  von  $u_0 = s$  nach  $u_l = u$  in  $N_{f_{i+1}}$  (d.h.  $d_{i+1}(s, u_h) = h$ ) für  $h = 1, \dots, l$  folgende (Un)gleichungen gelten:

$$d_i(s, u_h) \leq d_i(s, u_{h-1}) + 1, \text{ falls } (u_{h-1}, u_h) \in E_{f_i} \quad (3.1)$$

$$d_i(s, u_h) = d_i(s, u_{h-1}) - 1, \text{ falls } (u_{h-1}, u_h) \notin E_{f_i} \quad (3.2)$$

Es ist klar, dass (3.1) gilt, falls die Kante  $e = (u_{h-1}, u_h)$  auch in  $N_{f_i}$  enthalten ist. Andernfalls ist  $f_{i+1}(e) \neq f_i(e)$ , d.h.  $g_{i+1}(e) \neq 0$ . Da  $e$  nicht in  $N_{f_i}$  und somit auch nicht in  $N'_{f_i}$  enthalten ist, muss  $e^R = (u_h, u_{h-1})$  in  $N'_{f_i}$  sein. Da  $N'_{f_i}$  nur Kanten auf kürzesten Pfaden mit Startknoten  $s$  enthält, folgt  $d_i(s, u_{h-1}) = d_i(s, u_h) + 1$ , was (3.2) impliziert. Aus (3.1 + 3.2) folgt

$$d_i(s, u_l) \leq d_i(s, u_{l-1}) + 1 \leq \dots \leq d_i(s, s) + l = l = d_{i+1}(s, u_l)$$

und wir haben für jeden Knoten  $u \in V$  folgende Ungleichung bewiesen:

$$d_i(s, u) \leq d_{i+1}(s, u). \quad (3.3)$$

Um nun zu zeigen, dass  $\delta_i < \delta_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, k - 1$  gilt, sei  $P = (u_0, u_1, \dots, u_{\delta_{i+1}})$  ein kürzester Pfad von  $s = u_0$  nach  $t = u_{\delta_{i+1}}$  in  $N_{f_{i+1}}$  (und somit auch in  $N'_{f_{i+1}}$ ). Mit Ungleichung 3.3 folgt, dass  $d_i(s, u_h) \leq d_{i+1}(s, u_h) = h$  für  $h = 0, \dots, \delta_{i+1}$  ist. Wir unterscheiden zwei Fälle.

- Wenn alle Knoten  $u_h$  in  $N'_{f_i}$  enthalten sind, muss ein  $h$  mit  $d_i(s, u_h) \leq d_i(s, u_{h-1})$  existieren. Würde nämlich  $d_i(s, u_h) > d_i(s, u_{h-1})$  für  $h = 1, \dots, \delta_{i+1} - 1$  gelten, so wären die Kanten  $(u_{h-1}, u_h)$  für  $h = 1, \dots, \delta_{i+1} - 1$  wegen (3.2) in  $N_{f_i}$  enthalten und somit würde wegen (3.1)  $d_i(s, u_h) = d_i(s, u_{h-1}) + 1$  für

$h = 1, \dots, \delta_{i+1} - 1$  folgen. Dies hätte wiederum zur Folge, dass  $P$  ein kürzester Pfad von  $s$  nach  $t$  in  $N_{f_i}$  und somit ein  $s$ - $t$ -Pfad in  $N'_{f_i}$  wäre, der von  $g_i$  nicht blockiert wird, da er auch in  $N_{f_{i+1}}$  existiert. Da aber  $g_i$  blockierend ist, muss also ein  $h$  mit  $d_i(s, u_h) \leq d_i(s, u_{h-1})$  existieren und es folgt unter Verwendung von (3.1 + 3.2):

$$\delta_i = d_i(s, t) \leq d_i(s, u_h) + \underbrace{d_i(u_h, t)}_{\leq \delta_{i+1} - h} \leq \underbrace{d_i(s, u_{h-1})}_{\leq d_{i+1}(s, u_{h-1}) = h-1} + \delta_{i+1} - h < \delta_{i+1}$$

- Falls mindestens ein Knoten  $u_h$  nicht in  $N'_{f_i}$  enthalten ist, sei  $u_h$  der erste solche Knoten auf  $P$ . Da  $u_h \neq t$  ist, folgt  $d_{i+1}(s, u_h) < d_{i+1}(s, t) = \delta_{i+1}$ . Zudem liegt die Kante  $e = (u_{h-1}, u_h)$  nicht nur in  $N_{f_{i+1}}$ , sondern wegen  $f_{i+1}(e) = f_i(e)$  (da weder  $e$  noch  $e^R$  zu  $N'_{f_i}$  gehören) auch in  $N_{f_i}$ . Da somit  $u_{h-1}$  in  $N'_{f_i}$  und  $e$  in  $N_{f_i}$  ist, kann  $u_h$  nur aus dem Grund nicht zu  $N'_{f_i}$  gehören, dass  $d_i(s, u_h) = d_i(s, t)$  ist. Daher folgt unter Verwendung von (3.1 + 3.2 + 3.3) auch in diesem Fall die Ungleichung  $\delta_i < \delta_{i+1}$ :

$$\delta_i = d_i(s, t) = d_i(s, u_h) \leq \underbrace{d_i(s, u_{h-1})}_{\leq d_{i+1}(s, u_{h-1})} + 1 \leq d_{i+1}(s, u_h) < \delta_{i+1} \quad \blacksquare$$

**Korollar 3.22.** Der Algorithmus von Dinitz berechnet bei Verwendung der Prozedur **blockfluss1** einen maximalen Fluss in Zeit  $O(n^2m)$ .

Die Prozedur **blockfluss2** benötigt nur Zeit  $O(n^2)$ , um einen blockierenden Fluss  $g$  im Schichtnetzwerk  $N'_f$  zu berechnen, was auf eine Gesamtlaufzeit des Algorithmus von Dinitz von  $O(n^3)$  führt. Zu ihrer Beschreibung benötigen wir folgende Notation.

**Definition 3.23.** Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk.

a) Der **Durchsatz eines Knotens**  $u \in V$  ist

$$D(u) = \begin{cases} c^+(u), & u = s, \\ c^-(u), & u = t, \\ \min\{c^+(u), c^-(u)\}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $c^+(u) = \sum_{v \in V} c(u, v)$  die **Ausgangskapazität** und  $c^-(u) = \sum_{v \in V} c(v, u)$  die **Eingangskapazität von**  $u$  ist.

b) Ein Fluss  $g$  in  $N$  **sättigt einen Knoten**  $u \in V$ , falls

- $u = s$  ist und  $g$  alle Kanten  $(s, v) \in E$  mit Startknoten  $s$  sättigt, oder
- $u = t$  ist und  $g$  alle Kanten  $(v, t) \in E$  mit Zielknoten  $t$  sättigt, oder
- $u \in V - \{s, t\}$  ist und  $g$  alle Kanten  $(u, v) \in E$  mit Startknoten  $u$  oder alle Kanten  $(v, u) \in E$  mit Zielknoten  $u$  sättigt.

Die Korrektheit der Prozedur **blockfluss2** basiert auf folgender Proposition.

**Proposition 3.24.** Wenn ein Fluss  $g$  in einem Netzwerk  $N$  auf jedem  $s$ - $t$ -Pfad  $P$  mindestens einen Knoten  $u$  sättigt, dann ist  $g$  blockierend.

*Beweis.* Falls  $g$  mindestens einen Knoten  $u$  auf dem  $s$ - $t$ -Pfad  $P$  sättigt, dann sättigt  $g$  auch mindestens eine Kante auf dem Pfad  $P$ . ■

Beginnend mit dem trivialen Fluss  $g = 0$  berechnet die Prozedur **blockfluss2** für jeden Knoten  $u$  den Durchsatz  $D(u)$  im Schichtnetzwerk  $S = (V, E, s, t, c)$  und wählt in jedem Durchlauf der repeat-Schleife einen Knoten  $u$  mit minimalem Durchsatz  $D(u)$ . Dann benutzt sie die Prozeduren **propagierevor** und **propagiererrück**, um den aktuellen Fluss  $g$  um den Wert  $D(u)$  zu erhöhen und die Restkapazitäten der betroffenen Kanten sowie die Durchsatzwerte  $D(v)$  der betroffenen Knoten entsprechend zu aktualisieren.

Anschließend werden alle gesättigten Knoten aus  $V$  und alle gesättigten Kanten aus  $E$  entfernt. Hierzu werden in der Menge  $B$  alle Knoten gespeichert, deren Durchsatz durch die Erhöhungen des Flusses  $g$  auf 0 gesunken ist.

**Prozedur** `blockfluss2`( $S$ ),  $S = (V, E, s, t, c)$ 


---

```

1  for all  $e \in E \cup E^R$  do  $g(e) := 0$ 
2  for all  $u \in V$  do
3     $c^+(u) := \sum_{(u,v) \in E} c(u, v)$ 
4     $c^-(u) := \sum_{(v,u) \in E} c(v, u)$ 
5  repeat
6    for all  $u \in V \setminus \{s, t\}$  do  $D(u) := \min\{c^-(u), c^+(u)\}$ 
7     $D(s) := c^+(s)$ 
8     $D(t) := c^-(t)$ 
9    wähle  $u \in V$  mit  $D(u)$  minimal
10    $B := \{u\}$ 
11   propagierevor( $u$ )
12   propagiererrück( $u$ )
13   while  $\exists v \in B \setminus \{s, t\}$  do
14      $B := B \setminus \{v\}$ ;  $V := V \setminus \{v\}$ 
15     for all  $e = (v, w) \in E$  do
16        $c^-(w) := c^-(w) - c(v, w)$ 
17       if  $c^-(w) = 0$  then  $B := B \cup \{w\}$ 
18        $E := E \setminus \{e\}$ 
19     for all  $e = (w, v) \in E$  do
20        $c^+(w) := c^+(w) - c(w, v)$ 
21       if  $c^+(w) = 0$  then  $B := B \cup \{w\}$ 
22        $E := E \setminus \{e\}$ 
23   until  $u \in \{s, t\}$ 
24   return  $g$ 

```

---

Da in jedem Durchlauf der repeat-Schleife mindestens ein Knoten  $u$  gesättigt und aus  $V$  entfernt wird, wird nach höchstens  $n - 1$  Iterationen einer der beiden Knoten  $s$  oder  $t$  als Knoten  $u$  mit minimalem Durchsatz  $D(u)$  gewählt und die repeat-Schleife verlassen. Da nach Beendigung des letzten Durchlaufs der Durchsatz von  $s$  oder von  $t$  gleich 0 ist, wird einer dieser beiden Knoten zu diesem Zeitpunkt von  $g$  gesättigt. Nach Proposition 3.24 ist somit  $g$  ein blockierender Fluss.

Die Prozeduren `propagierevor` und `propagiererrück` propagieren den Fluss durch  $u$  in Vorwärtsrichtung hin zu  $t$  bzw. in Rückwärtsrichtung hin zu  $s$ . Dies geschieht in Form einer Breitensuche mit Startknoten  $u$  unter Benutzung der Kanten in  $E$  bzw.  $E^R$ . Da der Durchsatz  $D(u)$  von  $u$  unter allen Knoten minimal ist, ist sichergestellt, dass der Durchsatz  $D(v)$  jedes Knotens  $v$  ausreicht, um den für ihn ermittelten Zusatzfluss in Höhe von  $z(v)$  weiterzuleiten.

**Prozedur** `propagierevor`( $u$ )

---

```

1  for all  $v \in V$  do  $z(v) := 0$ 
2   $z(u) := D(u)$ 
3   $Q := (u)$ ;  $R := \{u\}$ 
4  while  $Q \neq ()$  do
5     $v := \text{dequeue}(Q)$ 
6    while  $z(v) \neq 0 \wedge \exists e = (v, w) \in E$  do
7      if  $w \notin R$  then enqueue( $Q, w$ )
8       $R := R \cup \{w\}$ 
9       $m := \min\{z(v), c(e)\}$ ;  $z(v) := z(v) - m$ ;  $z(w) := z(w) + m$ 
10     aktualisierekante( $e, m$ )

```

---

**Prozedur** `aktualisierekante`( $e, m$ ),  $e = (v, w)$ 


---

```

1   $g(e) := g(e) + m$ 
2   $c(e) := c(e) - m$ 
3  if  $c(e) = 0$  then  $E := E \setminus \{e\}$ 
4   $c^+(v) := c^+(v) - m$ 
5  if  $c^+(v) = 0$  then  $B := B \cup \{v\}$ 
6   $c^-(w) := c^-(w) - m$ 
7  if  $c^-(w) = 0$  then  $B := B \cup \{w\}$ 

```

---

Die Prozedur `propagiererrück` unterscheidet sich von der Prozedur `propagierevor` nur dadurch, dass in Zeile 6 die Bedingung  $\exists e = (v, w) \in E$  durch die Bedingung  $\exists e = (w, v) \in E$  ersetzt wird.

Da die repeat-Schleife von `blockfluss2` maximal  $(n - 1)$ -mal durch-

laufen wird, werden die Prozeduren **propagierevor** und **propagiererück** höchstens  $(n - 1)$ -mal aufgerufen. Sei  $a$  die Gesamtzahl der Durchläufe der inneren while-Schleife von **propagierevor**, summiert über alle Aufrufe. Da in jedem Durchlauf eine Kante aus  $E$  entfernt wird (falls  $m = c(v, u)$  ist) oder der zu propagierende Fluss  $z(v)$  durch einen Knoten  $v$  auf 0 sinkt (falls  $m = z(v)$  ist), was pro Knoten und pro Aufruf höchstens einmal vorkommt, ist  $a \leq n^2 + m$ . Der gesamte Zeitaufwand ist daher  $O(n^2 + m)$  innerhalb der beiden while-Schleifen und  $O(n^2)$  außerhalb. Die gleichen Schranken gelten für **propagiererück**.

Eine ähnliche Überlegung zeigt, dass die while-Schleife von **blockfluss2** einen Gesamtaufwand von  $O(n + m)$  hat. Folglich ist die Laufzeit von **blockfluss2**  $O(n^2)$ .

**Korollar 3.25.** *Der Algorithmus von Dinitz berechnet bei Verwendung der Prozedur **blockfluss2** einen maximalen Fluss in Zeit  $O(n^3)$ .*

Auf Netzwerken, deren Flüsse durch jede Kante oder durch jeden Knoten durch eine relativ kleine Zahl  $C$  beschränkt sind, lassen sich noch bessere Laufzeitschranken für den Dinitz-Algorithmus nachweisen. Hierzu benötigen wir folgende Beziehungen zwischen einem Netzwerk und den zugehörigen Restnetzwerken.

**Lemma 3.26.** *Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk,  $f$  ein Fluss in  $N$  und  $N_f$  das zugehörige Restnetzwerk. Zudem sei  $h : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}$ .*

- (i) *Die Funktion  $h$  ist genau dann ein Fluss (bzw. maximaler Fluss) in  $N_f$ , wenn  $f + h$  ein Fluss (bzw. maximaler Fluss) in  $N$  ist.*
- (ii) *Für jede Kante  $e \in E \cup E^R$  gilt  $c_f(e) + c_f(e^R) = c(e) + c(e^R)$ .*
- (iii) *Für jeden Knoten  $u \in V \setminus \{s, t\}$  gilt  $c_f^+(u) = c^+(u)$  und  $c_f^-(u) = c^-(u)$  und somit  $D_f(u) = D(u)$ .*

*Beweis.*

- (i) Da  $f$  die Antisymmetrie und die Kontinuität erfüllt, übertragen sich diese Eigenschaften von  $h$  auf  $f + h$  und umgekehrt. Weiter

gilt

$$h(u, v) \leq \underbrace{c_f(u, v)}_{c(u, v) - f(u, v)} \Leftrightarrow f(u, v) + h(u, v) \leq c(u, v),$$

d.h.  $h$  erfüllt genau dann die Kapazitätsbedingung in  $N_f$ , wenn  $f + h$  sie in  $N$  erfüllt. Zudem ist  $f + h$  genau dann ein maximaler Fluss in  $N$ , wenn  $h$  ein maximaler Fluss in  $N_f$  ist, da jeder Fluss  $h'$  in  $N_f$  mit  $|h'| > |h|$  einen Fluss  $f + h'$  der Größe  $|f + h'| > |f + h|$  in  $N$  und jeder Fluss  $g$  in  $N$  mit  $|g| > |f + h|$  einen Fluss  $g - f$  der Größe  $|g - f| = |g| - |f| > |f + h| - |f| = |h|$  in  $N_f$  liefern würde.

- (ii) Es gilt  $\underbrace{c_f(e)}_{c(e) - f(e)} + \underbrace{c_f(e^R)}_{c(e^R) - f(e^R)} = c(e) + c(e^R) - \underbrace{(f(e) + f(e^R))}_{=0}$ .
- (iii) Für jeden Knoten  $u \in V \setminus \{s, t\}$  gilt

$$c_f^+(u) = \sum_{v \in V} \underbrace{c_f(u, v)}_{c(u, v) - f(u, v)} = \sum_{v \in V} \underbrace{c(u, v)}_{c^+(u)} - \sum_{v \in V} \underbrace{f(u, v)}_{=0}.$$

Die Gleichheit  $c_f^-(u) = c^-(u)$  folgt analog. ■

**Lemma 3.27.** *Sei  $F > 0$  die maximale Flussgröße in einem Netzwerk  $N$  und sei  $\ell$  die Länge des zu  $N$  gehörigen Schichtnetzwerks  $N'$ .*

- (i) *Falls jeder Knoten  $u \in V \setminus \{s, t\}$  einen Durchsatz  $D(u) \leq C$  in  $N$  hat, gilt  $\ell \leq 1 + (n - 2)C/F$ .*
- (ii) *Falls jede Kante  $e \in E$  eine Kapazität  $c(e) \leq C$  hat, gilt  $\ell \leq \min\{mC/F, 2n\sqrt{C/F}\}$ .*

*Beweis.* Sei  $f$  ein Fluss der Größe  $F$  in  $N$ .

- (i) Da  $f$  für  $j = 1, \dots, \ell - 1$  durch die  $n_j$  Knoten der Schicht  $S_j$  von  $N'$  fließt, von denen jeder einen Durchsatz  $\leq C$  hat, muss

$$F \leq n_j C \text{ bzw. } F/C \leq n_j$$

sein, woraus  $n - 2 \geq \sum_{j=1}^{\ell-1} n_j \geq (\ell - 1)F/C$  bzw.  $\ell \leq 1 + (n - 2)C/F$  folgt.

- (ii) Für  $j = 1, \dots, \ell - 1$  sei  $E_j$  die Menge der Kanten von Schicht  $S_{j-1}$  nach Schicht  $S_j$  und sei  $E_\ell$  die Menge der Kanten von  $S_{\ell-1}$  nach  $S_\ell := V - \bigcup_{j=0}^{\ell-1} S_j$  in  $N$ . Da der Fluss  $f$  für  $j = 1, \dots, \ell$  durch die  $m_j$  Kanten in  $E_j$  fließt, die alle eine Kapazität  $\leq C$  haben, muss

$$F \leq m_j C \leq C|S_{j-1}||S_j| \text{ bzw. } F/C \leq m_j \leq |S_{j-1}||S_j|$$

sein, woraus sofort  $m \geq \sum_{j=1}^{\ell} m_j \geq \ell F/C$  bzw.  $\ell \leq mC/F$  folgt. Wegen  $F/C \leq |S_{j-1}||S_j|$  muss zudem  $S_{j-1}$  oder  $S_j$  mindestens  $\sqrt{F/C}$  Knoten enthalten und es folgt

$$(\ell/2)\sqrt{F/C} \leq |S_0| + \dots + |S_\ell| = n \text{ bzw. } \ell \leq 2n\sqrt{C/F} \quad \blacksquare$$

**Satz 3.28.** Sei  $k$  die Anzahl der Schleifendurchläufe des Algorithmus von Dinitz bei Eingabe eines Netzwerks  $N = (V, E, s, t, c)$ .

- (i) Falls jeder Knoten  $u \in V \setminus \{s, t\}$  einen Durchsatz  $D(u) \leq C$  hat, so gilt  $k \leq 1 + 2\sqrt{nC}$ .
- (ii) Falls jede Kante  $e \in E$  eine Kapazität  $c(e) \leq C$  hat, so gilt  $k \leq \min\{\sqrt{8mC}, 4(n^2C)^{1/3}\}$ .

*Beweis.* Sei  $F = |f|$  die Größe eines maximalen Flusses  $f$  in  $N$  und seien  $g_1, \dots, g_k$  die blockierenden Flüsse, die der Dinitz-Algorithmus der Reihe nach im Schichtnetzwerk  $N'_{f_i}$  berechnet, d.h.  $f_1$  ist der Nullfluss in  $N$  und  $f_{i+1} = f_i + g_i$ .

- (i) Da die Anzahl  $k$  der Schleifendurchläufe durch  $F$  beschränkt ist, können wir  $F > \sqrt{nC}$  annehmen. Betrachte den  $i$ -ten Schleifendurchlauf. Da  $f - f_i$  nach Lemma 3.26(i) ein maximaler Fluss in  $N_{f_i}$  der Größe  $R_i = F - |f_i|$  ist und nach Lemma 3.26(iii) jeder Knoten  $u \in V \setminus \{s, t\}$  in  $N_{f_i}$  den gleichen Durchsatz

wie in  $N$  hat, folgt nach Lemma 3.27(i), dass  $N'_{f_i}$  eine Länge  $\ell_i \leq 1 + nC/R_i$  hat. Wegen  $\ell_i \geq i + 1$  folgt daher

$$k \leq i + 1 + R_{i+1} \leq \ell_i + R_{i+1} \leq R_{i+1} + 1 + nC/R_i.$$

Nun wählen wir  $i$  so, dass  $R_i > \sqrt{nC}$  und  $R_{i+1} \leq \sqrt{nC}$  ist. Dann folgt

$$k - 1 \leq R_{i+1} + nC/R_i < \sqrt{nC} + nC/\sqrt{nC} = 2\sqrt{nC}.$$

- (ii) Zum Nachweis von  $k \leq \sqrt{8mC}$  können wir  $F > \sqrt{2mC}$  annehmen. Wir betrachten wieder den  $i$ -ten Schleifendurchlauf. Da jede Kante  $e \in E_{f_i}$  nach Lemma 3.26(ii) eine Kapazität  $c_{f_i}(e) \leq 2C$  hat und  $f - f_i$  nach Lemma 3.26(i) ein maximaler Fluss in  $N_{f_i}$  ist und die Größe  $R_i = F - |f_i|$  hat, folgt nach Lemma 3.27(ii), dass  $N'_{f_i}$  eine Länge  $\ell_i \leq 2mC/R_i$  hat. Wegen  $\ell_i \geq i + 1$  folgt daher

$$k \leq i + 1 + R_{i+1} \leq \ell_i + R_{i+1} \leq R_{i+1} + 2mC/R_i.$$

Wählen wir nun  $i$  so, dass  $R_i > \sqrt{2mC}$  und  $R_{i+1} \leq \sqrt{2mC}$  ist, so erhalten wir

$$k \leq \sqrt{2mC} + \sqrt{2mC} = \sqrt{8mC}.$$

Zum Nachweis von  $k \leq 4(n^2C)^{1/3}$  können wir  $F > (2n\sqrt{2C})^{2/3} = 2(n^2C)^{1/3}$  annehmen. Zudem folgt nach Lemma 3.27(ii), dass  $N'_{f_i}$  eine Länge  $\ell_i \leq 2n\sqrt{2C}/R_i$  hat. Damit ist  $k$  für jedes  $i = 0, \dots, k - 1$  durch

$$k \leq i + 1 + R_{i+1} \leq \ell_i + R_{i+1} \leq R_{i+1} + 2n\sqrt{2C}/R_i$$

beschränkt. Wählen wir nun  $i$  so, dass  $R_i > (2n\sqrt{2C})^{2/3}$  und  $R_{i+1} \leq (2n\sqrt{2C})^{2/3}$  ist, so erhalten wir

$$k \leq (2n\sqrt{2C})^{2/3} + 2n\sqrt{2C}/(2n\sqrt{2C})^{1/3} = 4(n^2C)^{1/3} \quad \blacksquare$$

**Korollar 3.29.** *Sei  $T$  die Laufzeit des Algorithmus von Dinitz unter Verwendung von **blockfluss1** bei Eingabe von  $N = (V, E, s, t, c)$ .*

- (i) *Falls jeder Knoten  $u \in V \setminus \{s, t\}$  einen Durchsatz  $D(u) \leq C$  hat, so gilt  $T = O((nC + m)\sqrt{nC})$ .*
- (ii) *Falls jede Kante  $e \in E$  eine Kapazität  $c(e) \leq C$  hat, so gilt  $T = O(\min\{(mC)^{3/2}, C^{4/3}n^{2/3}m\})$ .*

*Beweis.* Nach obigem Satz ist die Anzahl  $k$  der Schleifendurchläufe des Algorithmus von Dinitz im Fall (i) durch  $k \leq 1 + 2\sqrt{nC}$  und im Fall (ii) durch  $k \leq \min\{\sqrt{8mC}, 4(n^2C)^{1/3}\}$  beschränkt. Zudem folgt mit Lemma 3.26 dass jede Kante  $e$  und jeder Knoten  $u$  (außer  $s$  und  $t$ ) in jedem Restnetzwerk  $N_{f_i}$  (und somit auch in jedem Schichtnetzwerk  $N'_{f_i}$ ) eine Kapazität  $c(e) \leq 2C$  bzw. einen Durchsatz  $D(u) \leq C$  haben.

- (i) Jedesmal wenn **blockfluss1** einen  $s$ - $t$ -Pfad  $P$  im aktuellen Schichtnetzwerk findet, verringert sich der Durchsatz  $c(u)$  der auf  $P$  liegenden Knoten  $u$  um den Wert  $c(P) \geq 1$ , da der Fluss  $g$  durch diese Knoten um diesen Wert steigt. Daher kann jeder Knoten an maximal  $C$  Flusserhöhungen beteiligt sein, bevor sein Durchsatz auf 0 sinkt. Da somit pro Knoten ein Zeitaufwand von  $O(C)$  für alle erfolgreichen Tiefensuchschritte, die zu einem  $s$ - $t$ -Pfad führen, und zusätzlich pro Kante ein Zeitaufwand von  $O(1)$  für alle nicht erfolgreichen Tiefensuchschritte anfällt, läuft **blockfluss1** in Zeit  $O(nC + m)$ .
- (ii) Jedesmal wenn **blockfluss1** einen  $s$ - $t$ -Pfad  $P$  im Schichtnetzwerk findet, verringert sich die Kapazität  $c(e)$  der auf  $P$  liegenden Kanten  $e$  um den Wert  $c(P) \geq 1$ . Da somit pro Kante ein Zeitaufwand von  $O(C)$  für alle erfolgreichen Tiefensuchschritte und  $O(1)$  für alle nicht erfolgreichen Tiefensuchschritte anfällt, läuft **blockfluss1** in Zeit  $O(mC + m) = O(mC)$ . ■

### 3.4 Kostenoptimale Flüsse

In bestimmten Anwendungen fallen für die Benutzung jeder Kante Kosten an, deren Höhe proportional zum Fluss durch die Kante sind. Falls die Kosten für die einzelnen Kanten differieren, ist es möglich, dass zwei Flüsse  $f$  und  $g$  unterschiedliche Kosten verursachen, obwohl sie die gleiche Größe  $|f| = |g|$  haben. Gesucht ist dann ein maximaler Fluss  $f$  mit minimalen Kosten, wobei die Kosten von  $f$  in  $N$  wie folgt auf der Basis einer **Kostenfunktion**  $k$  bestimmt werden: Jede Kante  $e \in E$  mit  $f(e) \geq 0$  verursacht Kosten in Höhe von  $f(e)k(e)$ . Die **Gesamtkosten von**  $f$  in  $N = (V, E, s, t, c, k)$  betragen daher

$$k(f) = \sum_{f(e) > 0} f(e)k(e).$$