

Graphalgorithmen

Johannes Köbler



Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

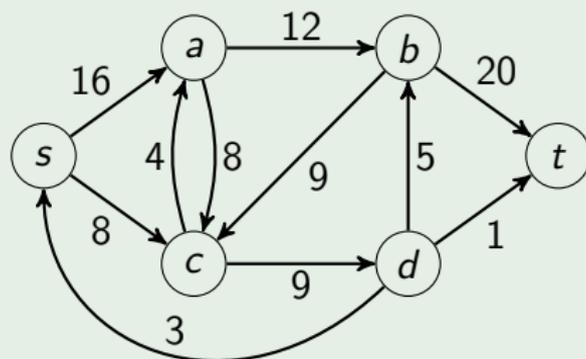
SS 2021

Flüsse in Netzwerken

Definition

- Ein **Netzwerk** $N = (V, E, s, t, c)$ besteht aus einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit einer **Quelle** $s \in V$ und einer **Senke** $t \in V$ sowie einer **Kapazitätsfunktion** $c : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$
- Dabei muss jede Kante $(u, v) \in E$ eine Kapazität $c(u, v) > 0$ und jede Nichtkante $(u, v) \notin E$ muss die Kapazität $c(u, v) = 0$ haben

Beispiel. Die folgende Abbildung zeigt ein Netzwerk N .



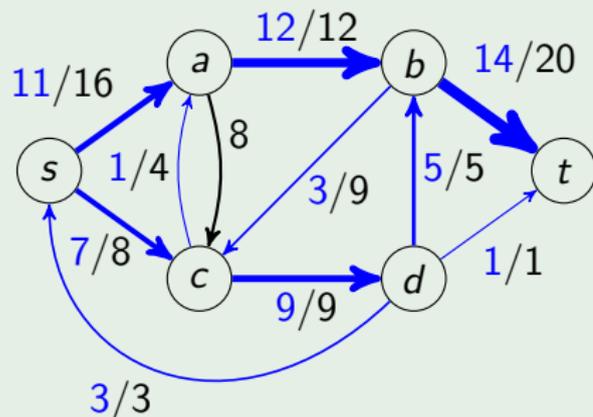
Flüsse in Netzwerken

Definition. Sei $N = (V, E, s, t, c)$ ein Netzwerk.

- Ein **Fluss** in N ist eine Funktion $f : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}$ mit
 - $f(u, v) \leq c(u, v)$ (Kapazitätsbedingung)
 - $f(u, v) = -f(v, u)$ (Antisymmetrie)
 - $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$ für alle $u \in V \setminus \{s, t\}$ (Kontinuität)
 - Die **Größe von f** ist $|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$
 - Der **Fluss in den Knoten u** ist $f^-(u) = \sum_{v \in V} \max\{0, f(v, u)\}$
 - Der **Fluss aus u** ist $f^+(u) = \sum_{v \in V} \max\{0, f(u, v)\}$
-
- Die Antisymmetrie impliziert, dass $f(u, u) = 0$ für alle $u \in V$ gilt und $|f| = f^+(s) - f^-(s)$ ist
 - Wir können also annehmen, dass $c(u, u) = 0$ für alle Knoten $u \in V$ gilt und somit $G = (V, E)$ schlingenfrei ist
 - Die Kontinuität besagt, dass $f^+(u) = f^-(u)$ für alle $u \in V \setminus \{s, t\}$ gilt

Beispiel (Fortsetzung)

- Die Abbildung zeigt einen Fluss f in N :



u	s	a	b	c	d	t
$f^+(u)$	18	12	17	10	9	0
$f^-(u)$	3	12	17	10	9	15

- Dieser hat die Größe $|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) = 11 + 7 - 3 = 15$

Der Ford-Fulkerson-Algorithmus

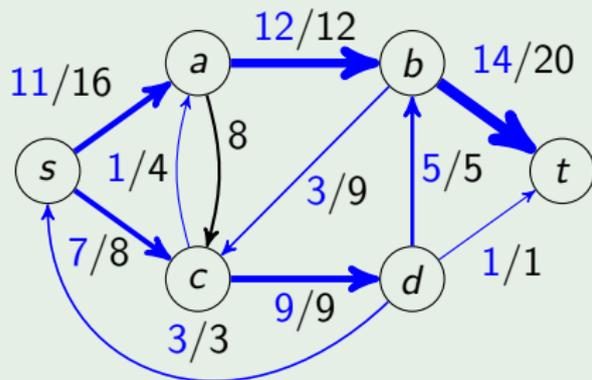
- Wie kann man für einen Fluss f in einem Netzwerk N entscheiden, ob er vergrößert werden kann?
- Diese Frage ist leicht zu beantworten, falls f auf $V \times V$ den Wert 0 hat
- In diesem Fall genügt es, in $G = (V, E)$ einen s - t -Pfad zu finden
- Andernfalls können wir ein Netzwerk N_f konstruieren, in dem sich der Nullfluss genau dann vergrößern lässt, wenn sich f in N vergrößern lässt

Definition

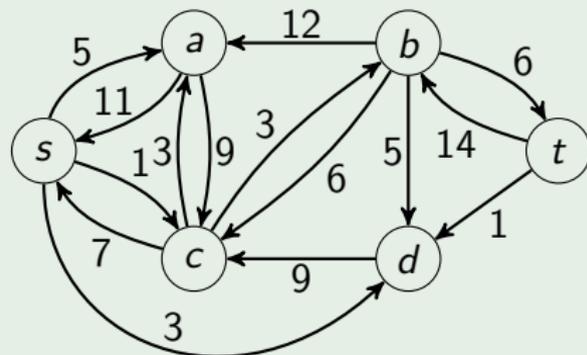
- Sei $N = (V, E, s, t, c)$ ein Netzwerk und sei f ein Fluss in N
- Das zugeordnete Restnetzwerk ist $N_f = (V, E_f, s, t, c_f)$ mit
 - den Kapazitäten $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$ und
 - der Kantenmenge $E_f = \{(u, v) \in V \times V : c_f(u, v) > 0\}$

Beispiel (Fortsetzung). Der Fluss f führt auf das folgende Restnetzwerk

Fluss f :



Restnetzwerk N_f :



Flüsse in Netzwerken

Definition. Sei $N = (V, E, s, t, c)$ ein Netzwerk.

- Dann heißt jeder s - t -Pfad P in (V, E) **Zunahmepfad** in N
- Die **Kapazität von P** in N ist

$$c(P) = \min\{c(u, v) : (u, v) \text{ liegt auf } P\}$$

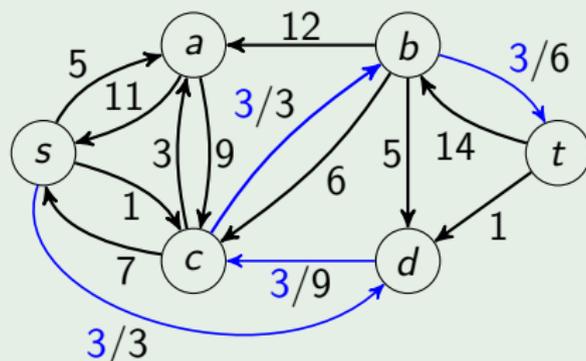
- und der **Fluss durch P in N** ist

$$f_P(u, v) = \begin{cases} c(P), & (u, v) \text{ liegt auf } P \\ -c(P), & (v, u) \text{ liegt auf } P \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Es ist leicht zu sehen, dass f_P tatsächlich ein Fluss in N ist
- Ein Pfad $P = (u_0, \dots, u_k)$ ist also ein Zunahmepfad in N , falls
 - $u_0 = s$ und $u_k = t$ ist
 - die Knoten u_0, \dots, u_k paarweise verschieden sind, und
 - $c(u_i, u_{i+1}) > 0$ für $i = 0, \dots, k - 1$ gilt

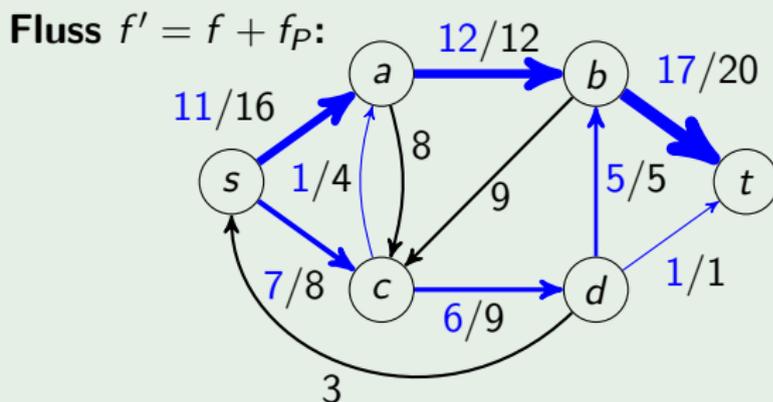
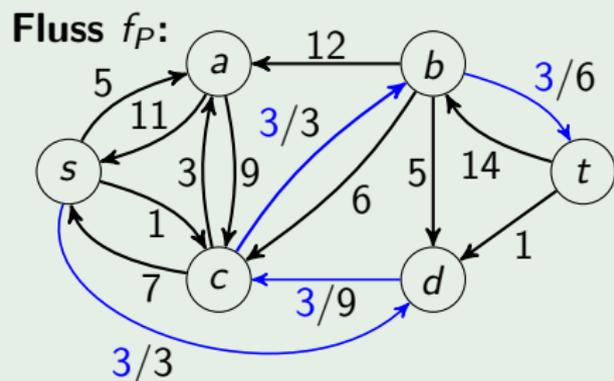
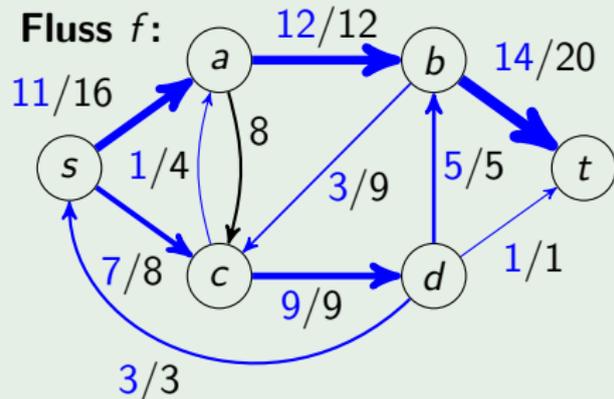
Beispiel (Fortsetzung)

Die folgende Abbildung zeigt den Zunahmepfad $P = (s, d, c, b, t)$ in N_f mit der Kapazität $c_f(P) = 3$ und den zugehörigen Fluss f_P in N_f



Durch Addition der beiden Flüsse f und f_P erhalten wir einen Fluss $f' = f + f_P$ in N der Größe $|f'| = |f| + |f_P| = |f| + c_f(P) > |f|$

Beispiel (Fortsetzung)

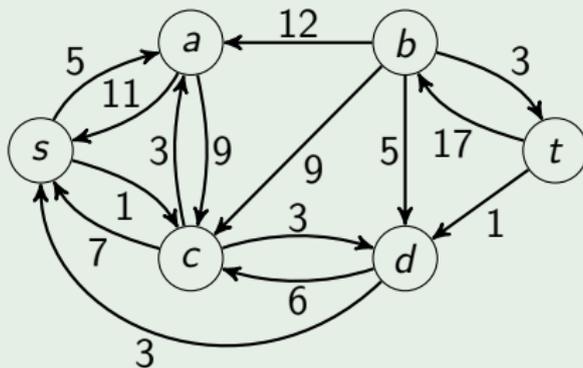


Flüsse in Netzwerken

Algorithmus Ford-Fulkerson(V, E, s, t, c)

-
- 1 **for all** $(u, v) \in E \cup E^R$ **do**
 - 2 $f(u, v) := 0$
 - 3 **while** es gibt einen Zunahmepfad P in N_f **do**
 - 4 $f := f + f_P$
-

Beispiel. Für den neuen Fluss erhalten wir nun folgendes Restnetzwerk:



In diesem existiert kein Zunahmepfad mehr

Der Ford-Fulkerson-Algorithmus

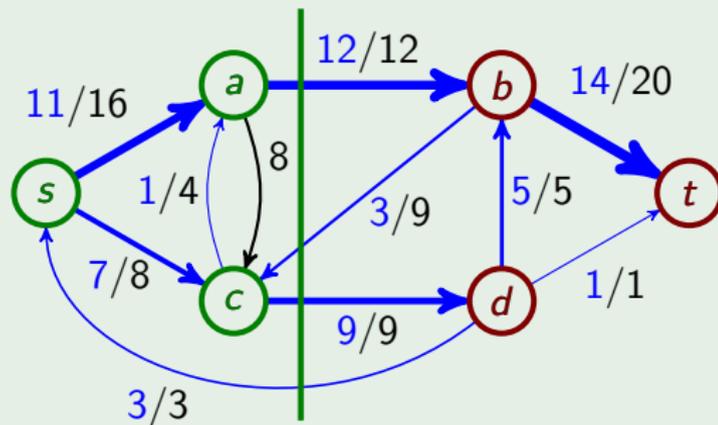
Um zu zeigen, dass der Algorithmus von Ford-Fulkerson tatsächlich einen Maximalfluss berechnet, weisen wir nach, dass f maximale Größe in N hat, wenn im Restnetzwerk N_f kein Zunahmepfad existiert

Definition. Sei $N = (V, E, s, t, c)$ ein Netzwerk und sei f ein Fluss in N .

- Eine Menge S mit $\emptyset \subsetneq S \subsetneq V$ heißt **Schnitt** durch N
- Der zugehörige **Kantenschnitt** ist $E(S) = \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \notin S\}$ (dieser wird oft auch einfach als **Schnitt** bezeichnet)
- Die **Kapazität eines Schnittes** S ist $c(S) = \sum_{e \in E(S)} c(e)$
- Der **Fluss durch den Schnitt** S ist $f(S) = \sum_{e \in E(S)} f(e)$
- Ist $u \in S$ und $v \notin S$, so wird S auch als **u - v -Schnitt** bezeichnet

Beispiel

- Betrachte folgenden s - t -Schnitt $S = \{s, a, c\}$ durch das Netzwerk N mit dem Fluss f :

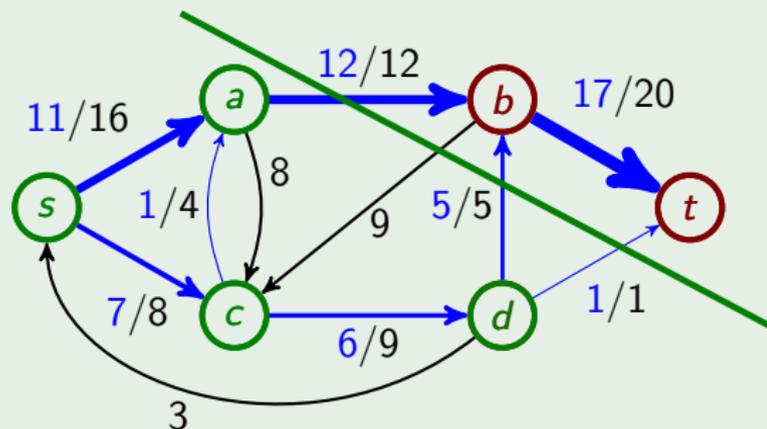


- Die Kapazität von S ist $c(S) = c(a, b) + c(c, d) = 12 + 9 = 21$ und die Größe des Flusses f durch den Schnitt S ist

$$f(S) = f(a, b) + f(c, b) + f(c, d) + f(s, d) = 12 - 3 + 9 - 3 = 15$$

Beispiel (Fortsetzung)

- Dagegen hat der s - t -Schnitt $S' = \{s, a, c, d\}$ durch das Netzwerk N mit dem Fluss f'



die Kapazität $c(S') = c(a, b) + c(d, b) + c(d, t) = 12 + 5 + 1 = 18$

- Diese stimmt mit der Größe des Flusses f' durch den Schnitt S' überein:

$$f'(S') = f'(a, b) + f'(d, b) + f'(d, t) = 12 + 5 + 1 = 18$$

Lemma

Für jeden Fluss f in einem Netzwerk N und jeden s - t -Schnitt S durch N gilt $|f| = f(S) \leq c(S)$

Beweis.

- Wir zeigen zuerst die Ungleichung $f(S) \leq c(S)$
- Wegen $f(e) \leq c(e)$ für alle $e \in V \times V$ gilt

$$f(S) = \sum_{e \in E(S)} f(e) \leq \sum_{e \in E(S)} c(e) = c(S)$$

- Die Gleichheit $|f| = f(S)$ zeigen wir durch Induktion über $k = |S|$
 - Im Fall $k = 1$ (IA) ist $S = \{s\}$ und wegen $f(s, s) = 0$ folgt

$$|f| = \sum_v f(s, v) = \sum_{v \neq s} f(s, v) = f(S)$$

Der Ford-Fulkerson-Algorithmus

Beweis (Fortsetzung)

- Für den IS sei S ein s - t -Schnitt mit $|S| = k \geq 2$ und sei S' der Schnitt $S - \{w\}$, wobei wir $w \in S - \{s\}$ beliebig wählen
- Nach IV gilt dann $|f| = f(S')$ und wegen $S = S' \cup \{w\}$ folgt

$$f(S) = \sum_{u \in S, v \notin S} f(u, v) = \sum_{u \in S', v \notin S} f(u, v) + \sum_{v \notin S} f(w, v)$$

- Zudem folgt wegen $V \setminus S' = (V \setminus S) \cup \{w\}$

$$f(S') = \sum_{u \in S', v \notin S'} f(u, v) = \sum_{u \in S', v \notin S} f(u, v) + \sum_{u \in S'} f(u, w)$$

- Daher erhalten wir

$$f(S) - f(S') = \sum_{v \notin S} f(w, v) - \sum_{u \in S'} \underbrace{f(u, w)}_{=-f(w, u)} = \sum_{v \neq w} f(w, v) = 0$$

- Also gilt $f(S) = f(S') = |f|$



Der Ford-Fulkerson-Algorithmus

Satz (Max-Flow-Min-Cut-Theorem)

Für einen Fluss f in einem Netzwerk $N = (V, E, s, t, c)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1 f ist maximal, d.h. für jeden Fluss f' in N gilt $|f'| \leq |f|$
- 2 Im Restnetzwerk N_f existiert kein Zunahmepfad
- 3 Es gibt einen s - t -Schnitt S durch N mit $c(S) = |f|$

Beweis.

- Die Implikation 1 \Rightarrow 2 ist klar, da die Existenz eines Zunahmepfads in N_f zu einer Vergrößerung von f führen würde
- Für die Implikation 2 \Rightarrow 3 betrachten wir den Schnitt

$$S = \{u \in V \mid u \text{ ist in } N_f \text{ von } s \text{ aus erreichbar}\}$$

- Dann gilt $t \notin S$ (da in N_f kein Zunahmepfad existiert)

Beweis (Fortsetzung)

- Für die Implikation ② \Rightarrow ③ betrachten wir den Schnitt

$$S = \{u \in V \mid u \text{ ist in } N_f \text{ von } s \text{ aus erreichbar}\}$$

- Dann gilt $t \notin S$ (da in N_f kein Zunahmepfad existiert)
- Zudem haben alle Kanten $e = (u, v) \in E(S)$ die Restkapazität $c_f(e) = c(e) - f(e) = 0$ (sonst wäre mit u auch v in S enthalten)
- Daher folgt

$$|f| = f(S) = \sum_{e \in E(S)} f(e) = \sum_{e \in E(S)} c(e) = c(S)$$

- Die Implikation ③ \Rightarrow ① folgt direkt aus obigem Lemma, da jeder Fluss f' in N im Fall $c(S) = |f|$ einen Wert $|f'| = f'(S) \leq c(S) = |f|$ hat \square

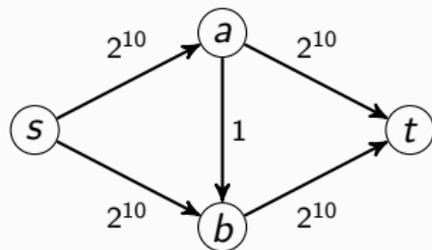
Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem gilt auch für Netzwerke mit beliebigen reellen Kapazitäten $c(e) \geq 0$

Der Ford-Fulkerson-Algorithmus

- Ist $c_0 = c(S)$ die Kapazität des Schnittes $S = \{s\}$, so durchläuft der Ford-Fulkerson-Algorithmus die while-Schleife höchstens c_0 -mal, da sich der aktuelle Fluss in jedem Durchlauf um mindestens 1 erhöht
- Bei jedem Durchlauf ist zuerst das Restnetzwerk N_f und danach ein Zunahmepfad in N_f zu berechnen
 - Die Berechnung des Zunahmepfades P kann durch Breitensuche in Zeit $\mathcal{O}(n + m)$ erfolgen
 - Da sich das Restnetzwerk nur entlang von P ändert, kann es in Zeit $\mathcal{O}(n)$ aktualisiert werden
- Jeder Durchlauf benötigt also Zeit $\mathcal{O}(n + m)$, was auf eine Gesamtlaufzeit von $\mathcal{O}(c_0(n + m))$ führt
- Da der Wert von c_0 jedoch exponentiell in der Länge der Eingabe (also der Beschreibung des Netzwerkes N) sein kann, ergibt dies keine polynomiell beschränkte Laufzeit
- Bei Netzwerken mit reellen Kapazitäten kann Ford-Fulkerson sogar unendlich lange laufen (siehe Übungen)

Der Ford-Fulkerson-Algorithmus

- Bei nebenstehendem Netzwerk benötigt Ford-Fulkerson zur Bestimmung des Maximalflusses abhängig von der Wahl der Zunahmepfade zwischen 2 und 2^{11} Schleifendurchläufe
- Im günstigsten Fall wird nämlich ausgehend vom Nullfluss f_0 zuerst der Zunahmepfad $P_1 = (s, a, t)$ mit der Kapazität 2^{10} und dann im Restnetzwerk N_{f_1} der Pfad $P_2 = (s, b, t)$ mit der Kapazität 2^{10} gewählt
- Im ungünstigsten Fall werden abwechselnd die beiden Zunahmepfade $P_1 = (s, a, b, t)$ und $P_2 = (s, b, a, t)$ (also $P_i = P_1$ für ungerades i und $P_i = P_2$ für gerades i) mit der Kapazität 1 gewählt. Dies führt auf insgesamt 2^{11} Schleifendurchläufe (siehe folgende Tabelle)



i	Fluss f_{P_i} in N_{f_i}	neuer Fluss f_{i+1} in N
1		
2		
⋮		
$2j - 1,$ $1 < j \leq 2^{10}$		

Der Ford-Fulkerson-Algorithmus

$2j - 1,$ $1 < j \leq 2^{10}$		
$2j,$ $1 < j < 2^{10}$		
\vdots		
2^{11}		

Nicht nur in diesem Beispiel lässt sich die exponentielle Laufzeit wie folgt vermeiden:

- Man betrachtet nur Zunahmepfade mit einer geeignet gewählten Mindestkapazität
 - Dies führt auf eine Laufzeit, die polynomiell in n , m und $\log c_0$ ist
- Man bestimmt in jeder Iteration einen kürzesten Zunahmepfad im Restnetzwerk mittels Breitensuche in Zeit $\mathcal{O}(n + m)$
 - Diese Vorgehensweise führt auf den **Edmonds-Karp-Algorithmus**, der eine Laufzeit von $\mathcal{O}(nm^2)$ hat (unabhängig von den Kapazitäten)
 - Diesen werden wir als nächstes betrachten

Der Ford-Fulkerson-Algorithmus

- **Dinitz** hatte die Idee, in jeder Iteration einen **blockierenden** Fluss g in N_f zu berechnen
 - Dieser benutzt nur Kanten, die auf einem kürzesten s - t -Pfad in N_f liegen, und **sättigt** auf jedem kürzesten s - t -Pfad mindestens eine Kante e (d.h. $g(e) = c_f(e)$), die dann in der nächsten Iteration fehlt
 - Da die Länge der kürzesten s - t -Pfade im Restnetzwerk in jeder Iteration um mindestens eins zunimmt, liegt nach spätestens $n - 1$ Iterationen ein maximaler Fluss vor
 - Dinitz hat gezeigt, dass der Fluss g in Zeit $\mathcal{O}(mn)$ bestimmt werden kann, was auf eine Laufzeit von $\mathcal{O}(n^2m)$ führt
- **Malhotra, Kumar und Maheswari** fanden später einen Ansatz, den Fluss g in Zeit $\mathcal{O}(n^2)$ zu berechnen, wodurch sich die Laufzeit auf $\mathcal{O}(n^3)$ verbessern ließ

Der Edmonds-Karp-Algorithmus

- Der Edmonds-Karp-Algorithmus ist eine spezielle Form von Ford-Fulkerson, die möglichst kurze Zunahmepfade benutzt
- Diese können mittels Breitensuche bestimmt werden

Algorithmus Edmonds-Karp(V, E, s, t, c)

```

1 for all  $(u, v) \in E \cup E^R$  do
2    $f(u, v) := 0$ 
3 while  $P := \text{zunahmepfad}(f) \neq \perp$  do
4    $\text{addierepfad}(f, P)$ 

```

Prozedur $\text{addierepfad}(f, P)$

```

1 for all  $e \in P$  do
2    $f(e) := f(e) + c_f(P)$ 
3    $f(e^R) := f(e^R) - c_f(P)$ 

```

Der Edmonds-Karp-Algorithmus

Prozedur $\text{zunahmepfad}(f)$

```
1 for all  $v \in V$  do
2    $\text{parent}(v) := \perp$ 
3    $Q := (s)$ 
4 while  $Q \neq () \wedge \text{parent}(t) = \perp$  do
5    $u := \text{dequeue}(Q)$ 
6   for all  $e = (u, v) \in E \cup E^R$  do
7     if  $c(e) - f(e) > 0 \wedge \text{parent}(v) = \perp$  then
8        $c'(e) := c(e) - f(e)$ 
9        $\text{parent}(v) := u$ 
10       $\text{enqueue}(Q, v)$ 
11 if  $\text{parent}(t) = \perp$  then
12    $P := \perp$ 
13 else
14    $P := \text{parent-Pfad von } s \text{ nach } t$ 
15    $c_f(P) := \min\{c'(e) \mid e \in P\}$ 
16 return  $P$ 
```

Der Edmonds-Karp-Algorithmus

- Die Prozedur $\text{zunahmepfad}(f)$ berechnet im Restnetzwerk N_f einen (gerichteten) s - t -Pfad P kürzester Länge, sofern ein s - t -Pfad existiert
- Dies ist genau dann der Fall, wenn die while-Schleife mit $\text{parent}(t) \neq \perp$ abbricht
- Der gefundene Zunahmepfad $P = (u_\ell, \dots, u_0)$ lässt sich dann ausgehend von $u_0 = t$ mittels parent zurückverfolgen:

$$u_i = \begin{cases} t, & i = 0, \\ \text{parent}(u_{i-1}), & i > 0 \text{ und } u_{i-1} \neq s \end{cases}$$

wobei $\ell = \min\{i \geq 1 \mid u_i = s\}$ ist

- Dann ist $u_\ell = s$ und P ein s - t -Pfad, den wir als den **parent-Pfad** von s nach t bezeichnen

Der Edmonds-Karp-Algorithmus

Satz

Der Edmonds-Karp-Algorithmus durchläuft die while-Schleife höchstens $(mn/2)$ -mal und hat somit eine Laufzeit von $O(nm^2)$

Beweis.

- Sei k die Anzahl der Schleifendurchläufe und seien P_1, \dots, P_k die Zunahmepfade, die der Algorithmus bei Eingabe N berechnet
- Es gilt also $f_{i+1} = f_i + f_{P_{i+1}}$, wobei f_0 der triviale Nullfluss und P_{i+1} der im Restnetzwerk N_{f_i} berechnete Zunahmepfad ist
- Eine Kante e auf P_{i+1} heißt **kritisch** für P_{i+1} , falls der Fluss $f_{P_{i+1}}$ in N_{f_i} die Kante e **sättigt**, d.h. $f_{P_{i+1}}(e) = c_{f_i}(e)$
- Eine kritische Kante e für P_{i+1} ist wegen

$$c_{f_{i+1}}(e) = c(e) - f_{i+1}(e) = c(e) - (f_i + f_{P_{i+1}}) = c_{f_i}(e) - f_{P_{i+1}}(e) = 0$$

nicht in $N_{f_{i+1}}$ enthalten, wohl aber die Kante e^R :

$$c_{f_{i+1}}(e^R) = c(e^R) - f_{i+1}(e^R) = c(e^R) + f_{i+1}(e) = c(e^R) + c(e) > 0$$

Beweis (Fortsetzung)

- Sei $d_i(u, v)$ die minimale Länge eines Pfades von u nach v im Restnetzwerk N_{f_i} und sei $\ell_{i+1} = d_i(s, t)$ die Länge von P_{i+1}
- Für den Rest des Beweises benötigen wir folgende drei Behauptungen

Behauptung 1.

Für jeden Knoten $u \in V$ gilt $d_i(s, u) \leq d_{i+1}(s, u)$ und $d_i(u, t) \leq d_{i+1}(u, t)$

Behauptung 2. Sei $e = (u, v)$ eine Kante auf dem Pfad P_{i+1} .

Falls e^R für ein $j > i$ auf dem Pfad P_{j+1} liegt, dann ist $\ell_{j+1} \geq \ell_{i+1} + 2$

Behauptung 3.

Seien P_{i_1}, \dots, P_{i_h} mit $1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq k$ die Pfade, für die e oder e^R kritisch sind. Dann ist $h \leq n/2$.

Der Edmonds-Karp-Algorithmus

Behauptung 1.

Für jeden Knoten $u \in V$ gilt $d_i(s, u) \leq d_{i+1}(s, u)$ und $d_i(u, t) \leq d_{i+1}(u, t)$

Beweis von Behauptung 1.

- Hierzu beweisen wir für jeden kürzesten Pfad $P = (u_0, \dots, u_\ell)$ von $u_0 = s$ nach $u_\ell = u$ in $N_{f_{i+1}}$ (d.h. $d_{i+1}(s, u) = \ell$) die Ungleichungen

$$d_i(s, u_h) \leq d_i(s, u_{h-1}) + 1 \text{ für } h = 1, \dots, \ell,$$

die $d_i(s, u) \leq \ell$ implizieren

- Falls die Kante $e = (u_{h-1}, u_h)$ in N_{f_i} enthalten ist, ist nichts zu zeigen
- Andernfalls muss $f_{i+1}(e) \neq f_i(e)$ sein, d.h. e oder e^R liegen auf P_{i+1}
- Da e nicht in N_{f_i} ist, muss $e^R = (u_h, u_{h-1})$ auf P_{i+1} liegen
- Da P_{i+1} ein kürzester Pfad von s nach t in N_{f_i} ist, folgt $d_i(s, u_{h-1}) = d_i(s, u_h) + 1$, was $d_i(s, u_h) = d_i(s, u_{h-1}) - 1 \leq d_i(s, u_{h-1}) + 1$ impliziert
- Vollkommen analog lässt sich $d_i(u, t) \leq d_{i+1}(u, t)$ zeigen □

Behauptung 2. Sei $e = (u, v)$ eine Kante auf dem Pfad P_{i+1} .

Falls e^R für ein $j > i$ auf dem Pfad P_{j+1} liegt, dann ist $l_{j+1} \geq l_{i+1} + 2$

Beweis von Behauptung 2.

- Da P_{i+1} ein kürzester s - t -Pfad der Länge $l_{i+1} = d_i(s, t)$ in N_{f_i} und P_{j+1} ein kürzester s - t -Pfad der Länge $l_{j+1} = d_j(s, t)$ in N_{f_j} ist, folgt dies direkt aus Behauptung 1:

$$d_j(s, t) = \underbrace{d_j(s, v)}_{\geq d_i(s, v)} + \underbrace{d_j(u, t)}_{\geq d_i(u, t)} + 1 \geq \underbrace{d_i(s, v)}_{d_i(s, u) + 1} + \underbrace{d_i(u, t)}_{d_i(v, t) + 1} + 1 = d_i(s, t) + 2 \quad \square$$

Der Edmonds-Karp-Algorithmus

Behauptung 3.

Seien P_{i_1}, \dots, P_{i_h} mit $1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq k$ die Pfade, für die e oder e^R kritisch sind. Dann ist $h \leq n/2$.

Beweis von Behauptung 3.

- Wir zeigen zuerst, dass $\ell_{i_{j+1}} \geq \ell_{i_j} + 2$ für $j = 1, \dots, h - 1$ gilt
- Falls $e' \in \{e, e^R\}$ für ein $j \in \{1, \dots, h - 1\}$ kritisch für den Pfad P_{i_j} ist, dann fehlt e' im Restnetzwerk $N_{f_{i_j}}$
- Daher kann e' nur dann eine kritische Kante für den Pfad $P_{i_{j+1}}$ sein, wenn e'^R auf einem Pfad P_i mit $i_j < i \leq i_{j+1}$ liegt
- Dies gilt natürlich erst recht, wenn die Kante e'^R für $P_{i_{j+1}}$ kritisch ist
- Mit Behauptung 1 und Behauptung 2 folgt also $\ell_{i_{j+1}} \geq \ell_i \geq \ell_{i_j} + 2$
- Daher ist

$$n - 1 \geq \ell_{i_h} \geq \ell_{i_1} + 2(h - 1) \geq 1 + 2(h - 1) = 2h - 1,$$

was $h \leq n/2$ impliziert



Beweis des Satzes (Schluss)

- Nach Behauptung 3 sind e und e^R für jede Kante $e \in E$ zusammen höchstens auf $n/2$ vielen Pfaden P_i kritisch
- Da $E \cup E^R$ höchstens m Kantenpaare der Form $\{e, e^R\}$ enthält, können die k Pfade P_1, \dots, P_k höchstens $mn/2$ kritische Kanten enthalten
- Da aber auf jedem Pfad P_i mindestens eine Kante kritisch ist, muss $k \leq mn/2$ sein □

Man beachte, dass der Beweis auch bei Netzwerken mit reellen Kapazitäten seine Gültigkeit behält

- In den Übungen wird gezeigt, dass sich in jedem Netzwerk N ein maximaler Fluss durch Addition von höchstens m Zunahmepfaden konstruieren lässt
- Es ist aber nicht bekannt, ob sich solche Pfade in Zeit $O(m)$ bestimmen lassen
- Wenn ja, würde dies auf eine Gesamtlaufzeit von $O(m^2)$ führen
- Für dichte Netzwerke (d.h. $m = \Theta(n^2)$) hat der Algorithmus von Dinitz die gleiche Laufzeit $O(n^2 m) = O(n^4)$ und die verbesserte Version ist mit $O(n^3)$ in diesem Fall sogar noch schneller

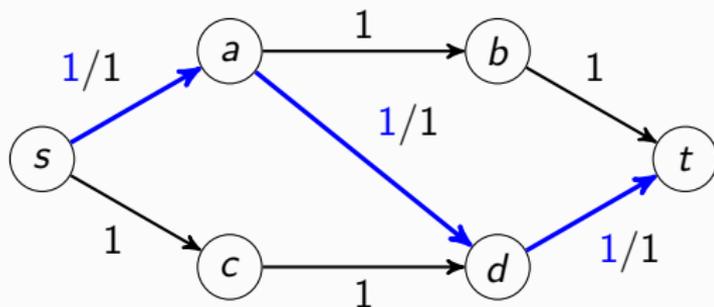
Der Algorithmus von Dinitz

- Die Analyse der Laufzeit des Edmonds-Karp-Algorithmus benutzt die Tatsache, dass der Fluss durch den Zunahmepfad P_{i+1} , der in jedem Schleifendurchlauf auf den aktuellen Fluss f_i addiert wird, eine Kante auf *mindestens einem* kürzesten Pfad im Restnetzwerk N_{f_i} sättigt
- Dies hat zur Folge, dass nicht mehr als $mn/2$ Zunahmepfade P_i benötigt werden, um einen maximalen Fluss zu erhalten
- Dagegen addiert der Algorithmus von Dinitz in jedem Schleifendurchlauf auf den aktuellen Fluss f einen Fluss g , der auf *jedem* kürzesten Pfad im Restnetzwerk N_f mindestens eine Kante sättigt
- Wir werden sehen, dass maximal $n - 1$ solche Flüsse g_i benötigt werden

Definition

- Ein Fluss g in einem Netzwerk $N = (V, E, s, t, c)$ **sättigt** eine Kante $e \in E$, falls $g(e) = c(e)$ ist
- g heißt **blockierend**, falls g mindestens eine Kante auf jedem Pfad P von s nach t sättigt

- Nach dem Max-Flow-Min-Cut-Theorem gibt es zu jedem maximalen Fluss f einen s - t -Schnitt S , so dass alle Kanten in $E(S)$ gesättigt sind
- Da jeder Pfad von s nach t mindestens eine Kante in $E(S)$ enthalten muss, ist jeder maximale Fluss auch blockierend
- Für die Umkehrung gibt es jedoch einfache Gegenbeispiele, wie etwa



- Ein blockierender Fluss muss also nicht unbedingt maximal sein
- Tatsächlich ist g genau dann ein blockierender Fluss in N , wenn es im Restnetzwerk N_g keinen Zunahmepfad gibt, der nur aus *Vorwärtskanten* $e \in E$ mit $g(e) < c(e)$ besteht

- Der Algorithmus von Diniz berechnet anstelle eines kürzesten Zunahmepfades P im aktuellen Restnetzwerk N_f einen blockierenden Fluss g im Schichtnetzwerk N'_f
- Dieses enthält nur diejenigen Kanten von N_f , die auf einem kürzesten Pfad mit Startknoten s liegen
- Zudem werden aus N'_f alle Knoten $u \neq t$ entfernt, die einen Abstand $d(s, u) \geq d(s, t)$ in N_f haben
- Der Name rührt daher, dass jeder Knoten in N'_f einer Schicht S_j zugeordnet wird

Definition

- Sei $N = (V, E, s, t, c)$ ein Netzwerk und bezeichne $d(x, y)$ die Länge eines kürzesten Pfades von x nach y in N
- Das zugeordnete **Schichtnetzwerk** ist $N' = (V', E', s, t, c')$ mit
 - der Knotenmenge $V' = S_0 \cup \dots \cup S_\ell$
 - der Kantenmenge $E' = \bigcup_{j=1}^{\ell} \{(u, v) \in E \mid u \in S_{j-1} \wedge v \in S_j\}$ und
 - der Kapazitätsfunktion

$$c'(e) = \begin{cases} c(e), & e \in E', \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei

$$S_j = \begin{cases} \{u \in V \mid d(s, u) = j\}, & 0 \leq j \leq \ell - 1 \\ \{t\}, & j = \ell \end{cases}$$

und $\ell = 1 + \max\{d(s, u) < d(s, t) \mid u \in V\}$ ist

Algorithmus Dinitz(N), $N = (V, E, s, t, c)$

```
1 for all  $(u, v) \in E \cup E^R$  do  
2    $f(u, v) := 0$   
3 while  $S := \text{schichtnetzwerk}(N, f) \neq \perp$  do  
4    $f := f + \text{blockfluss}(S)$ 
```

- Das zum Restnetzwerk $N_f = (V, E_f, s, t, c_f)$ gehörige Schichtnetzwerk $N'_f = (V', E'_f, s, t, c'_f)$ wird von der Prozedur $\text{schichtnetzwerk}(N, f)$ in Zeit $O(n + m)$ berechnet
- Für die Berechnung eines blockierenden Flusses g in einem Schichtnetzwerk S werden wir zwei Algorithmen betrachten
- Eine Prozedur blockfluss1 , deren Laufzeit durch $O(mn)$ und eine Prozedur blockfluss2 , deren Laufzeit durch $O(n^2)$ beschränkt ist
- Wir beschreiben zuerst die Prozedur schichtnetzwerk

- Diese führt in N_f eine modifizierte Breitensuche mit Startknoten s durch und speichert dabei in der Menge E' nicht nur alle Baumkanten, sondern zusätzlich alle **Querkanten** (u, v) (d.h. u und v liegen nicht auf einem gemeinsamen parent-Pfad), die auf einem kürzesten Weg von s zu v liegen
- Die Suche bricht ab, sobald t am Kopf der Schlange erscheint oder alle von s aus erreichbaren Knoten abgearbeitet sind
- Falls t erreicht wird, werden außer der Senke t alle Knoten u , die in N_f einen Abstand $d(s, u) < d(s, t)$ von der Quelle s haben, in der Menge V' zusammengefasst
- Zudem werden alle Kanten aus E' wieder entfernt, die nicht zwischen zwei Knoten aus V' verlaufen
- Wird t dagegen nicht erreicht, so existiert in N_f (und damit in N'_f) kein (blockierender) Fluss g mit $|g| > 0$ und somit auch kein Zunahmepfad in N_f , d.h. f ist bereits maximal

Prozedur schichtnetzwerk(N, f)

```

1   $E' := \emptyset$ 
2  for all  $v \in V$  do  $niv(v) := n$ 
3   $niv(s) := 0$ ;  $Q := (s)$ 
4  while  $Q \neq () \wedge \text{head}(Q) \neq t$  do
5       $u := \text{dequeue}(Q)$ 
6      for all  $e = (u, v) \in E \cup E^R$  do
7          if  $c(e) - f(e) > 0 \wedge niv(v) > niv(u)$  then
8               $E' := E' \cup \{e\}$ 
9               $c'(e) := c(e) - f(e)$ 
10             if  $niv(v) > niv(u) + 1$  then
11                  $niv(v) := niv(u) + 1$ 
12                  $\text{enqueue}(Q, v)$ 
13 if  $\text{head}(Q) = t$  then
14      $V' := \{v \in V \mid niv(v) < niv(t)\} \cup \{t\}$ 
15      $E' := E' \cap (V' \times V')$ 
16     return  $(V', E', s, t, c')$ 
17 else return  $\perp$ 

```

Der Algorithmus von Dinitz

- Die Laufzeitschranke $O(n + m)$ für die Prozedur `schichtnetzwerk` folgt aus der Tatsache, dass jede Kante in $E \cup E^R$ höchstens einmal besucht wird und jeder Besuch mit einem konstanten Zeitaufwand verbunden ist
- Nun kommen wir zur Prozedur `blockfluss1`, die einen blockierenden Fluss g in einem Schichtnetzwerk $S = (V, E, s, t, c)$ berechnet
- Beginnend mit dem Nullfluss g bestimmt diese in der `repeat`-Schleife
 - mittels Tiefensuche einen s - t -Pfad P in S
 - addiert den Fluss f_P durch P in S zum aktuellen Fluss g hinzu
 - aktualisiert die Kapazitäten aller Kanten e auf dem Pfad P und
 - entfernt aus S die von g gesättigten Kanten
- Der gefundene Pfad P lässt sich hierbei direkt aus dem Inhalt des Kellers K rekonstruieren, weshalb wir ihn als **K -Pfad** bezeichnen
- Man beachte, dass die Kapazitäten der auf P liegenden Kanten nur in Vorwärtsrichtung und nicht wie bei Ford-Fulkerson und Edmonds-Karp auch in Rückwärtsrichtung angepasst werden

- Falls die Tiefensuche in einem Knoten $u \neq s$ in einer Sackgasse endet (weil E keine von u aus weiterführenden Kanten enthält), wird die zuletzt besuchte Kante (u', u) ebenfalls aus E entfernt und die Tiefensuche vom Startpunkt u' dieser Kante fortgesetzt (backtracking)
- Die Prozedur `blockfluss1` bricht ab, sobald alle Kanten mit Startknoten s aus E entfernt wurden und somit in (V, E) keine Pfade mehr von s nach t existieren (d.h. g ist ein blockierender Fluss in S)
- Die Laufzeitschranke $O(mn)$ für `blockfluss1` folgt aus der Tatsache, dass sich die Anzahl der aus E entfernten Kanten nach spätestens n Schleifendurchläufen um 1 erhöht

Prozedur blockfluss1(S), $S = (V, E, s, t, c)$

```

1  for all  $e \in E \cup E^R$  do  $g(e) := 0$ 
2   $u := s$ ;  $K := (s)$ ; done := false
3  repeat
4    if  $\exists e = (u, v) \in E$  then
5      push( $K, v$ );  $u := v$ 
6    elsif  $u = t$  then
7       $P := K$ -Pfad von  $s$  nach  $t$ 
8       $c(P) := \min\{c(e) \mid e \in P\}$ 
9      for all  $e \in P$  do
10        $g(e) := g(e) + c(P)$ ;  $g(e^R) := -g(e)$ ;  $c(e) := c(e) - c(P)$ 
11       if  $c(e) = 0$  then  $E := E \setminus \{e\}$ 
12        $K := (s)$ ;  $u := s$ 
13     elsif  $u \neq s$  then \ \ backtracking
14       pop( $K$ );  $u' := \text{top}(K)$ ;  $E := E \setminus \{(u', u)\}$ ;  $u := u'$ 
15     else done := true
16 until done
17 return  $g$ 

```

Satz

Der Algorithmus von Dinitz durchläuft die while-Schleife höchstens $(n - 1)$ -mal

Beweis.

- Sei f_0 der Nullfluss in N und seien g_1, \dots, g_k die blockierenden Flüsse, die der Dinitz-Algorithmus der Reihe nach berechnet, d.h.
$$f_{i+1} = f_i + g_{i+1}$$
- Zudem sei $d_i(u, v)$ die minimale Länge eines Pfades von u nach v im Restnetzwerk N_{f_i} und sei $\delta_i = d_i(s, t)$
- Wir zeigen, dass $\delta_i < \delta_{i+1}$ für $i = 1, \dots, k - 1$ gilt
- Da $\delta_1 \geq 1$ und $\delta_k \leq n - 1$ ist, folgt $k \leq n - 1$

Beweis (Fortsetzung)

- Sei $P = (u_0, \dots, u_\ell)$ ein kürzester Pfad von $u_0 = s$ nach $u_\ell = u$ in $N_{f_{i+1}}$ (d.h. es gilt $d_{i+1}(s, u_h) = h$ für $h = 1, \dots, \ell$)
- Wir beweisen für $h = 1, \dots, \ell$ die folgenden (Un)gleichungen:

$$d_i(s, u_h) \leq d_i(s, u_{h-1}) + 1, \text{ falls } (u_{h-1}, u_h) \in E_{f_i} \quad (1)$$

$$d_i(s, u_h) = d_i(s, u_{h-1}) - 1, \text{ falls } (u_{h-1}, u_h) \notin E_{f_i} \quad (2)$$

- Es ist klar, dass (1) gilt
- Falls die Kante $e = (u_{h-1}, u_h)$ nicht in N_{f_i} (aber in $N_{f_{i+1}}$) enthalten ist, muss $f_{i+1}(e) \neq f_i(e)$ und somit $g_{i+1}(e) \neq 0$ sein
- Da e dann auch nicht in N'_{f_i} ist, muss $e^R = (u_h, u_{h-1})$ in N'_{f_i} sein
- Da N'_{f_i} nur Kanten auf kürzesten Pfaden mit Startknoten s enthält, folgt $d_i(s, u_{h-1}) = d_i(s, u_h) + 1$, was (2) impliziert

Beweis (Fortsetzung)

- Aus (1 + 2) folgt

$$d_i(s, u_\ell) \leq d_i(s, u_{\ell-1}) + 1 \leq \dots \leq d_i(s, s) + \ell = \ell = d_{i+1}(s, u_\ell)$$

- Somit haben wir folgende Ungleichung bewiesen:

$$\text{Für jeden Knoten } u \in V \text{ gilt } d_i(s, u) \leq d_{i+1}(s, u) \quad (3)$$

- Nun zeigen wir $\delta_i < \delta_{i+1}$ für $i = 1, \dots, k - 1$
- Sei $P = (u_0, u_1, \dots, u_{\delta_{i+1}})$ ein kürzester Pfad von $s = u_0$ nach $t = u_{\delta_{i+1}}$ in $N_{f_{i+1}}$ (und somit auch in $N'_{f_{i+1}}$)
- Mit Ungleichung 3 folgt, dass $d_i(s, u_h) \leq d_{i+1}(s, u_h) = h$ für $h = 0, \dots, \delta_{i+1}$ ist
- Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
 - Alle Knoten u_h sind in N'_i enthalten
 - Mindestens ein Knoten u_h ist nicht in N'_i enthalten

Beweis (Fortsetzung)

- Alle Knoten u_h sind in N'_{f_i} enthalten
 - In diesem Fall muss ein h mit $d_i(s, u_h) \leq d_i(s, u_{h-1})$ existieren
 - Würde nämlich $d_i(s, u_h) > d_i(s, u_{h-1})$ für $h = 1, \dots, \delta_{i+1} - 1$ gelten, so wären die Kanten (u_{h-1}, u_h) für $h = 1, \dots, \delta_{i+1} - 1$ wegen (2) in N_{f_i} enthalten und somit würde wegen (1) $d_i(s, u_h) = d_i(s, u_{h-1}) + 1$ für $h = 1, \dots, \delta_{i+1} - 1$ folgen
 - Dies hätte wiederum zur Folge, dass P ein kürzester Pfad von s nach t in N_{f_i} und somit ein s - t -Pfad in N'_{f_i} wäre, der von g_i nicht blockiert wird, da er auch in $N_{f_{i+1}}$ existiert
 - Da aber g_i jeden s - t -Pfad in N'_{f_i} blockiert, muss also ein h mit $d_i(s, u_h) \leq d_i(s, u_{h-1})$ existieren und es folgt mit (1 + 2):

$$\delta_i = d_i(s, t) \leq d_i(s, u_h) + \underbrace{d_i(u_h, t)}_{\leq \delta_{i+1} - h} \leq \underbrace{d_i(s, u_{h-1})}_{\leq d_{i+1}(s, u_{h-1}) = h - 1} + \delta_{i+1} - h < \delta_{i+1}$$

Beweis (Schluss)

- Mindestens ein Knoten u_h ist nicht in N'_{f_i} enthalten
 - Sei u_h der erste solche Knoten auf P und sei $e = (u_{h-1}, u_h)$
 - Da $u_h \neq t = u_{\delta_{i+1}}$ ist, folgt $d_{i+1}(s, u_h) < d_{i+1}(s, t) = \delta_{i+1}$
 - Zudem liegt die Kante e nicht nur in $N_{f_{i+1}}$, sondern wegen $f_{i+1}(e) = f_i(e)$ (da weder e noch e^R zu N'_{f_i} gehören) auch in N_{f_i}
 - Da somit u_{h-1} in N'_{f_i} und e in N_{f_i} ist, kann u_h nur aus dem Grund nicht zu N'_{f_i} gehören, dass $d_i(s, u_h) = d_i(s, t)$ ist
 - Daher folgt unter Verwendung von (1 + 2 + 3) auch in diesem Fall die Ungleichung $\delta_i < \delta_{i+1}$:

$$\delta_i = d_i(s, t) = d_i(s, u_h) \leq \underbrace{d_i(s, u_{h-1})}_{\leq d_{i+1}(s, u_{h-1})} + 1 \leq d_{i+1}(s, u_h) < \delta_{i+1} \quad \square$$

Korollar

Der Algorithmus von Dinitz berechnet bei Verwendung der Prozedur `blockfluss1` einen maximalen Fluss in Zeit $O(n^2 m)$

Der Algorithmus von Dinitz

- Wir betrachten nun die Prozedur `blockfluss2`
- Zu ihrer Beschreibung benötigen wir folgende Notation

Definition Sei $N = (V, E, s, t, c)$ ein Netzwerk.

- Der **Durchsatz eines Knotens** $u \in V$ in N ist

$$D(u) = \begin{cases} c^+(u), & u = s \\ c^-(u), & u = t \\ \min\{c^+(u), c^-(u)\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $c^+(u) = \sum_{v \in V} c(u, v)$ die **Ausgangskapazität** und $c^-(u) = \sum_{v \in V} c(v, u)$ die **Eingangskapazität von u** in N ist

- Ein Fluss g in N **sättigt einen Knoten** $u \in V$ in N , falls
 - $u = s$ ist und g alle Kanten $(s, v) \in E$ mit Startknoten s sättigt
 - oder $u = t$ ist und g alle Kanten $(v, t) \in E$ mit Zielknoten t sättigt
 - oder $u \in V - \{s, t\}$ ist und g alle Kanten $(u, v) \in E$ mit Startknoten u oder alle Kanten $(v, u) \in E$ mit Zielknoten u sättigt

Die Korrektheit von `blockfluss2` basiert auf folgender Implikation

Proposition

Ein Fluss g in einem Netzwerk N ist g blockierend, wenn er auf jedem s - t -Pfad mindestens einen Knoten u sättigt

Beweis.

Falls g mindestens einen Knoten u auf einem s - t -Pfad P sättigt, dann sättigt g auch mindestens eine Kante auf dem Pfad P □

- Beginnend mit dem trivialen Fluss $g = 0$ berechnet die Prozedur `blockfluss2` für jeden Knoten u den Durchsatz $D(u)$ im Schichtnetzwerk $S = (V, E, s, t, c)$ und wählt in jedem Durchlauf der `repeat`-Schleife einen Knoten u mit minimalem Durchsatz
- Dann benutzt sie die Prozeduren `propagierevor` und `propagierererück`, um den aktuellen Fluss g um den Wert $D(u)$ zu erhöhen und die Restkapazitäten der betroffenen Kanten sowie die Durchsatzwerte $D(v)$ der betroffenen Knoten zu aktualisieren
- Anschließend werden alle gesättigten Knoten aus V und alle gesättigten Kanten aus E entfernt
- Hierzu werden in der Menge B alle Knoten gespeichert, sobald deren Durchsatz durch die vorgenommenen Erhöhungen von g auf 0 sinkt

Prozedur blockfluss2(S), $S = (V, E, s, t, c)$

```
1 for all  $e \in E \cup E^R$  do  $g(e) := 0$ 
2 for all  $u \in V$  do
3    $c^+(u) := \sum_{(u,v) \in E} c(u,v)$ ;  $c^-(u) := \sum_{(v,u) \in E} c(v,u)$ 
4 repeat
5   wähle  $u \in V$  mit  $D(u)$  minimal
6    $B := \{u\}$ ; propagierevor( $u$ ); propagiererrück( $u$ )
7   while  $\exists v \in B \setminus \{s, t\}$  do
8      $B := B \setminus \{v\}$ ;  $V := V \setminus \{v\}$ 
9     for all  $e = (v, w) \in E$  do
10       $E := E \setminus \{e\}$ ;  $c^-(w) := c^-(w) - c(v, w)$ 
11      if  $c^-(w) = 0$  then  $B := B \cup \{w\}$ 
12     for all  $e = (w, v) \in E$  do
13       $E := E \setminus \{e\}$ ;  $c^+(w) := c^+(w) - c(w, v)$ 
14      if  $c^+(w) = 0$  then  $B := B \cup \{w\}$ 
15 until  $u \in \{s, t\}$ 
16 return  $g$ 
```

Der Algorithmus von Dinitz

- Die Prozedur `blockfluss2` sättigt in jedem Durchlauf der `repeat`-Schleife mindestens einen Knoten u und entfernt ihn aus V
- Daher wird nach höchstens $n - 1$ Iterationen einer der beiden Knoten s oder t als Knoten u mit minimalem Durchsatz $D(u)$ gewählt und die `repeat`-Schleife verlassen
- Da nach der letzten Iteration der Durchsatz von s oder von t gleich Null ist, wird einer dieser beiden Knoten zu diesem Zeitpunkt von g gesättigt, d.h. g ist nach obiger Proposition ein blockierender Fluss
- Die Prozeduren `propagierevor` und `propagierेरück` propagieren den Fluss durch u in Vorwärtsrichtung hin zu t bzw. in Rückwärtsrichtung hin zu s
- Dies geschieht in Form einer Breitensuche mit Startknoten u unter Benutzung der Kanten in E bzw. E^R
- Da der Durchsatz $D(u)$ von u unter allen Knoten minimal ist, ist sichergestellt, dass der Durchsatz $D(v)$ jedes Knotens v ausreicht, um den für ihn ermittelten Zusatzfluss in Höhe von $z(v)$ weiterzuleiten

Prozedur propagierevor(u)

```
1 for all  $v \in V$  do  $z(v) := 0$ 
2  $z(u) := D(u)$ 
3  $Q := (u); R := \{u\}$ 
4 while  $Q \neq ()$  do
5    $v := \text{dequeue}(Q)$ 
6   while  $z(v) \neq 0 \wedge \exists e = (v, w) \in E$  do
7     if  $w \notin R$  then  $\text{enqueue}(Q, w)$ 
8      $R := R \cup \{w\}$ 
9      $m := \min\{z(v), c(e)\}; z(v) := z(v) - m; z(w) := z(w) + m$ 
10     $\text{aktualisiererekante}(e, m)$ 
```

- Die Prozedur propagiererrück unterscheidet sich von der Prozedur propagierevor nur dadurch, dass in Zeile 6 die Bedingung $\exists e = (v, w) \in E$ durch die Bedingung $\exists e = (w, v) \in E$ ersetzt wird

Prozedur aktualisiererekante(e, m), $e = (v, w)$

```
1  $g(e) := g(e) + m$ 
2  $c(e) := c(e) - m$ 
3 if  $c(e) = 0$  then  $E := E \setminus \{e\}$ 
4  $c^+(v) := c^+(v) - m$ 
5 if  $c^+(v) = 0$  then  $B := B \cup \{v\}$ 
6  $c^-(w) := c^-(w) - m$ 
7 if  $c^-(w) = 0$  then  $B := B \cup \{w\}$ 
```

- Da die repeat-Schleife von blockfluss2 maximal $(n - 1)$ -mal durchlaufen wird, werden die Prozeduren propagierevor und propagiererück höchstens $(n - 1)$ -mal aufgerufen
- Sei a die Gesamtzahl der Durchläufe der inneren while-Schleife von propagierevor, summiert über alle Aufrufe

Der Algorithmus von Dinitz

- Dann gilt $a \leq m + n^2$, da in jedem Durchlauf der inneren while-Schleife
 - eine Kante aus E entfernt wird (falls in Zeile 9 $m = c(v, u)$ ist), was pro Kante höchstens einmal vorkommt
 - oder der zu propagierende Fluss $z(v)$ durch einen Knoten v auf Null sinkt (falls in Zeile 9 $m = z(v)$ ist), was pro Aufruf und pro Knoten höchstens einmal vorkommt
- Der gesamte Zeitaufwand ist daher $O(n^2 + m)$ innerhalb der beiden while-Schleifen und $O(n^2)$ außerhalb
- Die gleichen Schranken gelten für propagiererrück und eine ähnliche Überlegung zeigt, dass die while-Schleife von `blockfluss2` einen Gesamtaufwand von $O(n + m)$ hat
- Folglich ist die Laufzeit von `blockfluss2` $O(n^2)$

Korollar

Der Algorithmus von Dinitz berechnet bei Verwendung der Prozedur `blockfluss2` einen maximalen Fluss in Zeit $O(n^3)$

- Auf Netzwerken, deren Flüsse durch jede Kante oder durch jeden Knoten durch eine relativ kleine Zahl C beschränkt sind, lassen sich noch bessere Laufzeitschranken für den Dinitz-Algorithmus nachweisen
- Hierzu benötigen wir folgende Beziehungen zwischen einem Netzwerk N und seinen Restnetzwerken N_f

Lemma

Sei $N = (V, E, s, t, c)$ ein Netzwerk, f ein Fluss in N und $h : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}$

- Ⓐ Die Funktion h ist genau dann ein Fluss (bzw. maximaler Fluss) in N_f , wenn $f + h$ ein Fluss (bzw. maximaler Fluss) in N ist
- Ⓑ Für jede Kante $e \in E \cup E^R$ gilt $c_f(e) + c_f(e^R) = c(e) + c(e^R)$
- Ⓒ Für alle Knoten $u \in V \setminus \{s, t\}$ gilt $c_f^+(u) = c^+(u)$ und $c_f^-(u) = c^-(u)$ und somit $D_f(u) = D(u)$, wobei $D_f(u)$ der Durchsatz von u in N_f ist

Der Algorithmus von Dinitz

- Ⓐ Die Funktion h ist genau dann ein Fluss (bzw. maximaler Fluss) in N_f , wenn $f + h$ ein Fluss (bzw. maximaler Fluss) in N ist

Beweis.

- Da f die Antisymmetrie und die Kontinuität erfüllt, übertragen sich diese Eigenschaften von h auf $f + h$ und umgekehrt
- Weiter erfüllt h wegen

$$h(e) \leq \underbrace{c_f(e)}_{c(e) - f(e)} \Leftrightarrow f(e) + h(e) \leq c(e),$$

genau dann die Kapazitätsbedingung in N_f , wenn $f + h$ sie in N erfüllt

- h ist genau dann maximal in N_f , wenn $g = f + h$ maximal in N ist, da
 - jeder Fluss h' in N_f mit $|h'| > |h|$ einen Fluss $g' = f + h'$ der Größe $|g'| = |f + h'| > |f + h| = |g|$ in N
 - und jeder Fluss g' in N mit $|g'| > |g|$ einen Fluss $h' = g' - f$ der Größe $|h'| = |g' - f| > |g| - |f| = |f + h| - |f| = |h|$ in N_f

liefern würde

Der Algorithmus von Dinitz

• Für jede Kante $e \in E \cup E^R$ gilt $c_f(e) + c_f(e^R) = c(e) + c(e^R)$

Beweis.

$$\text{Es gilt } \underbrace{c_f(e)}_{c(e)-f(e)} + \underbrace{c_f(e^R)}_{c(e^R)-f(e^R)} = c(e) + c(e^R) - \underbrace{[f(e) + f(e^R)]}_{=f(e)-f(e)=0}$$

• Für alle Knoten $u \in V \setminus \{s, t\}$ gilt $c_f^+(u) = c^+(u)$ und $c_f^-(u) = c^-(u)$ und somit $D_f(u) = D(u)$

Beweis.

• Für alle Knoten $u \in V \setminus \{s, t\}$ gilt

$$c_f^+(u) = \sum_{v \in V} \underbrace{c_f(u, v)}_{c(u, v) - f(u, v)} = \underbrace{\sum_{v \in V} c(u, v)}_{c^+(u)} - \underbrace{\sum_{v \in V} f(u, v)}_{=0}$$

• Die Gleichheit $c_f^-(u) = c^-(u)$ folgt analog

Lemma

Sei $F > 0$ die maximale Flussgröße in einem Netzwerk N und sei ℓ die Länge des zu N gehörigen Schichtnetzwerks N'

- Ⓓ Falls jeder Knoten $u \in V \setminus \{s, t\}$ einen Durchsatz $D(u) \leq C$ in N hat, gilt $\ell \leq 1 + (n - 2)C/F$
- Ⓔ Falls jede Kante $e \in E$ eine Kapazität $c(e) \leq C$ hat, gilt $\ell \leq \min \left\{ mC/F, 2n\sqrt{C/F} \right\}$

Beweis. Sei f ein Fluss der Größe F in N

- Ⓓ Da f für $j = 1, \dots, \ell - 1$ durch die n_j Knoten der Schicht S_j von N' fließt, von denen jeder einen Durchsatz $\leq C$ hat, folgt

$$F \leq n_j C \text{ bzw. } F/C \leq n_j$$

$$\text{Also ist } n - 2 \geq \sum_{j=1}^{\ell-1} n_j \geq (\ell - 1)F/C \text{ bzw. } \ell \leq 1 + (n - 2)C/F$$

Der Algorithmus von Diniz

- Ⓔ Falls jede Kante $e \in E$ eine Kapazität $c(e) \leq C$ hat, gilt
 $\ell \leq \min\{mC/F, 2n\sqrt{C/F}\}$

Beweis.

- Für $j = 1, \dots, \ell - 1$ sei E_j die Menge der Kanten von Schicht S_{j-1} nach Schicht S_j und sei E_ℓ die Menge der Kanten von $S_{\ell-1}$ nach $S_\ell := V - \bigcup_{j=0}^{\ell-1} S_j$ in N
- Da der Fluss f für $j = 1, \dots, \ell$ durch die m_j Kanten in E_j fließt, die alle eine Kapazität $\leq C$ haben, muss

$$F \leq m_j C \leq C |S_{j-1}| |S_j| \text{ bzw. } F/C \leq m_j \leq |S_{j-1}| |S_j|$$

sein, woraus sofort $m \geq \sum_{j=1}^{\ell} m_j \geq \ell F/C$ bzw. $\ell \leq mC/F$ folgt

- Wegen $F/C \leq |S_{j-1}| |S_j|$ muss zudem S_{j-1} oder S_j mindestens $\sqrt{F/C}$ Knoten enthalten und es folgt

$$(\ell/2)\sqrt{F/C} \leq |S_0| + \dots + |S_\ell| = n \text{ bzw. } \ell \leq 2n\sqrt{C/F}$$

□

Der Algorithmus von Dinitz

Satz

Sei k die Anzahl der Schleifendurchläufe des Algorithmus von Dinitz bei Eingabe eines Netzwerks $N = (V, E, s, t, c)$.

- ① Falls jeder Knoten $u \in V \setminus \{s, t\}$ einen Durchsatz $D(u) \leq C$ hat, so gilt $k \leq 1 + 2\sqrt{nC}$
- ② Falls jede Kante $e \in E$ eine Kapazität $c(e) \leq C$ hat, so gilt $k \leq \min \{8(mC)^{1/2}, 4(n^2C)^{1/3}\}$

Beweis.

- Sei $F = |f|$ die Größe eines maximalen Flusses f in N und seien g_1, \dots, g_k die blockierenden Flüsse, die der Dinitz-Algorithmus der Reihe nach in den Schichtnetzwerken $N'_{f_0}, \dots, N'_{f_{k-1}}$ berechnet
- f_0 ist also der Nullfluss in N und $f_{i+1} = f_i + g_{i+1}$ für $i = 0, \dots, k-1$

Der Algorithmus von Dinitz

- ① Falls jeder Knoten $u \in V \setminus \{s, t\}$ einen Durchsatz $D(u) \leq C$ hat, so gilt $k \leq 1 + 2\sqrt{nC}$

Beweis.

- Da die Anzahl k der Schleifendurchläufe $\leq F$ ist, müssen wir nur den Fall $F > \sqrt{nC}$ betrachten
- Wir schätzen zuerst die Längen ℓ_i der Schichtnetzwerke N'_{f_i} ab
- Da $f - f_i$ nach ① ein maximaler Fluss in N_{f_i} der Größe $R_i = F - |f_i|$ ist und nach ③ jeder Knoten $u \in V \setminus \{s, t\}$ in N_{f_i} den gleichen Durchsatz wie in N hat, folgt nach ④ dass $\ell_i \leq 1 + nC/R_i$ ist

- Wegen $\ell_i \geq i + 1$ folgt daher

$$k \leq i + 1 + R_{i+1} \leq \ell_i + R_{i+1} \leq R_{i+1} + 1 + nC/R_i$$

- Nun wählen wir i so, dass $R_{i+1} \leq \sqrt{nC} < R_i$ ist und erhalten

$$k - 1 \leq R_{i+1} + nC/R_i \leq \sqrt{nC} + nC/\sqrt{nC} = 2\sqrt{nC}$$



- ② Falls jede Kante $e \in E$ eine Kapazität $c(e) \leq C$ hat, so gilt $k \leq \min\{\sqrt{8mC}, 4(n^2C)^{1/3}\}$

Beweis.

- Zum Nachweis von $k \leq \sqrt{8mC}$ können wir $F > \sqrt{2mC}$ annehmen
- Wir schätzen wieder die Längen ℓ_i der Schichtnetzwerke N'_i ab
- Da jede Kante $e \in E_{f_i}$ nach ② eine Kapazität $c_{f_i}(e) \leq 2C$ hat und $f - f_i$ nach ① ein maximaler Fluss in N_{f_i} der Größe $R_i = F - |f_i|$ ist, folgt mit ⑤ dass $\ell_i \leq 2mC/R_i$ ist
- Wegen $\ell_i \geq i + 1$ folgt daher

$$k \leq i + 1 + R_{i+1} \leq \ell_i + R_{i+1} \leq R_{i+1} + 2mC/R_i$$

- Wählen wir nun i so, dass $R_{i+1} \leq \sqrt{2mC} < R_i$ ist, so erhalten wir

$$k \leq R_{i+1} + 2mC/R_i \leq \sqrt{2mC} + \sqrt{2mC} = \sqrt{8mC}$$

- ② Falls jede Kante $e \in E$ eine Kapazität $c(e) \leq C$ hat, so gilt
 $k \leq \min\{\sqrt{8mC}, 4(n^2C)^{1/3}\}$

Beweis (Schluss)

- Zum Nachweis von $k \leq 4(n^2C)^{1/3}$ können wir annehmen, dass $F > 2(n^2C)^{1/3} = (2n\sqrt{2C})^{2/3}$ ist
- Zudem folgt mit ⑤ dass N'_i eine Länge $\ell_i \leq 2n\sqrt{2C/R_i}$ hat
- Wegen $\ell_i \geq i + 1$ folgt daher

$$k \leq i + 1 + R_{i+1} \leq \ell_i + R_{i+1} \leq R_{i+1} + 2n\sqrt{2C/R_i}$$

- Wählen wir nun i so, dass $R_{i+1} \leq (2n\sqrt{2C})^{2/3} < R_i$ ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned} k &\leq R_{i+1} + 2n\sqrt{2C/R_i} \\ &\leq (2n\sqrt{2C})^{2/3} + 2n\sqrt{2C}/(2n\sqrt{2C})^{1/3} \\ &= 2(2n\sqrt{2C})^{2/3} = 4(n^2C)^{1/3} \end{aligned}$$

Korollar

Sei T die Laufzeit des Algorithmus von Dinitz unter Verwendung von `blockfluss1` bei Eingabe von $N = (V, E, s, t, c)$

- 1 Falls jeder Knoten $u \in V \setminus \{s, t\}$ einen Durchsatz $D(u) \leq C$ hat, so gilt $T = O((nC + m)\sqrt{nC})$
- 2 Falls jede Kante $e \in E$ eine Kapazität $c(e) \leq C$ hat, so gilt $T = O(\min\{(mC)^{3/2}, C^{4/3}n^{2/3}m\})$

Beweis.

- Nach obigem Satz ist die Anzahl k der Schleifendurchläufe des Algorithmus von Dinitz im Fall 1 durch $k \leq 1 + 2\sqrt{nC}$ und im Fall 2 durch $k \leq \min\{\sqrt{8mC}, 4(n^2C)^{1/3}\}$ beschränkt
- Zudem folgt mit 3 dass jeder Knoten u (außer s und t) und jede Kante e in jedem Restnetzwerk N_{f_i} (und somit auch in jedem Schichtnetzwerk N'_{f_i}) einen Durchsatz $D(u) \leq C$ bzw. eine Kapazität $c(e) \leq 2C$ haben

Prozedur blockfluss1(S), $S = (V, E, s, t, c)$

```
1 for all  $e \in E \cup E^R$  do  $g(e) := 0$ 
2  $u := s$ ;  $K := (s)$ ; done := false
3 repeat
4   if  $\exists e = (u, v) \in E$  then
5     push( $K, v$ );  $u := v$ 
6   elseif  $u = t$  then
7      $P := K$ -Pfad von  $s$  nach  $t$ 
8      $c(P) := \min\{c(e) \mid e \in P\}$ 
9     for all  $e \in P$  do
10       $g(e) := g(e) + c(P)$ ;  $g(e^R) := -g(e)$ ;  $c(e) := c(e) - c(P)$ 
11      if  $c(e) = 0$  then  $E := E \setminus \{e\}$ 
12       $K := (s)$ ;  $u := s$ 
13   elseif  $u \neq s$  then \ \ backtracking
14     pop( $K$ );  $u' := \text{top}(K)$ ;  $E := E \setminus \{(u', u)\}$ ;  $u := u'$ 
15   else done := true
16 until done
17 return  $g$ 
```

- ① Falls jeder Knoten $u \in V \setminus \{s, t\}$ einen Durchsatz $D(u) \leq C$ hat, so gilt $T = O((nC + m)\sqrt{nC})$

Beweis.

- Jedesmal wenn `blockfluss1` einen s - t -Pfad P im aktuellen Schichtnetzwerk findet, verringert sich der Durchsatz $c(u)$ der auf P liegenden Knoten u um den Wert $c(P) \geq 1$, da der Fluss g durch diese Knoten um diesen Wert steigt
- Daher kann jeder Knoten an maximal C Flusserhöhungen beteiligt sein, bevor sein Durchsatz auf 0 sinkt
- Da somit pro Knoten ein Zeitaufwand von $O(C)$ für alle erfolgreichen Tiefensuchschritte, die zu einem s - t -Pfad führen, und zusätzlich pro Kante ein Zeitaufwand von $O(1)$ für alle nicht erfolgreichen Tiefensuchschritte anfällt, läuft `blockfluss1` in Zeit $O(nC + m)$

- 2 Falls jede Kante $e \in E$ eine Kapazität $c(e) \leq C$ hat, so gilt
 $T = O(\min\{(mC)^{3/2}, C^{4/3}n^{2/3}m\})$

Beweis.

- Jedesmal wenn `blockfluss1` einen s - t -Pfad P im Schichtnetzwerk findet, verringert sich die Kapazität $c(e)$ der auf P liegenden Kanten e um den Wert $c(P) \geq 1$
- Da somit pro Kante ein Zeitaufwand von $O(C)$ für alle erfolgreichen Tiefensuchschritte und $O(1)$ für alle nicht erfolgreichen Tiefensuchschritte anfällt, läuft `blockfluss1` in Zeit $O(mC + m) = O(mC)$ □

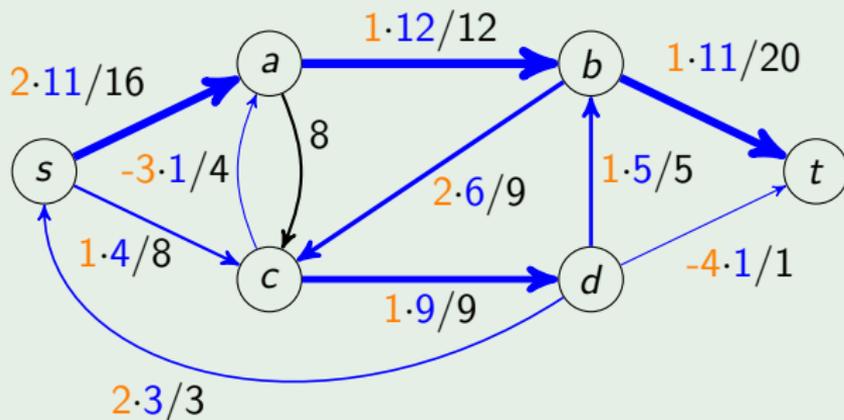
Kostenoptimale Flüsse

- In bestimmten Anwendungen fallen für die Benutzung jeder Kante Kosten an, deren Höhe proportional zum Fluss durch die Kante ist
- Falls zwei Flüsse f und g die einzelnen Kanten eines Netzwerks unterschiedlich beanspruchen, ist es möglich, dass f und g unterschiedliche Kosten verursachen, obwohl sie die gleiche Größe $|f| = |g|$ haben
- Gesucht ist dann ein maximaler Fluss f mit minimalen Kosten, wobei die Kosten von f in N wie folgt auf der Basis einer **Kostenfunktion** k bestimmt werden
- Jede Kante $e \in E$ mit $f(e) \geq 0$ verursacht Kosten in Höhe von $k(e)f(e)$
- Die **Gesamtkosten** von f in $N = (V, E, s, t, c, k)$ betragen daher

$$k(f) = \sum_{f(e)>0} k(e)f(e)$$

Beispiel

- Die Abbildung zeigt einen Fluss f in N , wobei alle Kanten $e \in E$ mit $f(e) > 0$ mit $k(e) \cdot f(e)/c(e)$ beschriftet sind:



- Seine Größe ist $|f| = f(\{s\}) = 11 + 4 - 3 = 12$ und seine Kosten sind

$$k(f) = \sum_{f(e) > 0} k(e)f(e) = (12 + 11 + 5 + 4 + 9) + 2(11 + 6 + 3) - 3 - 4 = 90$$

Kostenoptimale Flüsse

- Ist $k(e) < 0$ so bedeuten Kosten in Höhe von $k(e)f(e)$ einen Gewinn in Höhe von $-k(e)f(e)$ und umgekehrt
- Erhöhen wir den Fluss $f(e)$ durch eine Kante e um a , so fallen dafür Kosten in Höhe von $k(e) \cdot a$ an
- Entsprechend verursacht eine Erniedrigung von $f(e)$ um a einen Gewinn von $k(e) \cdot a$ (bzw. Kosten in Höhe von $-k(e) \cdot a$)
- Da eine Erhöhung von $f(e)$ um a den Fluss $f(e^R) = -f(e)$ durch e^R um a erniedrigt, muss also $k(e^R) = -k(e)$ sein
- Möchten wir für eine Kante $e = (u, v)$ einen anderen Kostenfaktor b als $-k(e^R)$ haben, so können wir einen neuen Knoten w zu V hinzufügen und die Kante e durch den Pfad $P = (u, w, v)$ ersetzen
- Nun kann $k(P)$ unabhängig vom Wert $k(e^R)$ mittels $k(u, w) = b$ und $k(w, v) = 0$ auf den gewünschten Wert b gesetzt werden

Kostenoptimale Flüsse

- Wir betrachten in diesem Abschnitt also Netzwerke der Form $N = (V, E, s, t, c, k)$, wobei k eine antisymmetrische Funktion $k : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $k(e) = -k(e^R)$ für alle $e \in V \times V$ ist
- Zudem definieren wir für beliebige Multimengen F von Kanten $e \in V \times V$ den **Kostenfaktor von F** als $k(F) = \sum_{e \in F} v_F(e)k(e)$
- Jede Kante $e \in F$ wird bei der Berechnung von $k(F)$ also entsprechend der Häufigkeit $v_F(e)$ ihres Vorkommens in F berücksichtigt
- Wir nennen F **negativ**, falls $k(F) < 0$ ist
- Für einen Fluss f sei

$$k_{\min}(f) = \min\{k(g) \mid g \text{ ist ein Fluss in } N \text{ mit } |g| = |f|\}$$

das Minimum der Kosten $k(g)$ aller Flüsse g in N der Größe $|g| = |f|$

- Das nächste Lemma liefert einen Algorithmus, mit dem sich überprüfen lässt, ob ein Fluss minimale Kosten unter allen Flüssen seiner Größe hat

Lemma

Ein Fluss f in N hat genau dann minimale Kosten $k(f) = k_{\min}(f)$, wenn es im Restnetzwerk N_f keinen negativen Kreis K mit $k(K) < 0$ gibt

Beweis.

- Falls es in N_f einen negativen Kreis K gibt, können wir den Fluss durch alle Kanten $e \in K$ um eins erhöhen, um einen Fluss g der Größe $|g| = |f|$ mit $k(g) = k(f) + k(K) < k(f)$ zu erhalten
- Sei nun umgekehrt g ein Fluss in N mit $|g| = |f|$ und $k(g) < k(f)$
- Wegen $g(e) - f(e) \leq c(e) - f(e)$ ist dann $h = g - f$ ein Fluss im Restnetzwerk $N_f = (V, E_f, s, t, c_f, k)$
- Da h die Größe $|h| = |g| - |f| = 0$ hat, können wir h als Summe von Flüssen $f_{K_1}, \dots, f_{K_\ell}$ in N_f darstellen, wobei jeder Fluss f_{K_i} nur für Kanten e auf einem Kreis K_i in (V, E_f) einen positiven Wert $f_{K_i}(e) = w_i > 0$ annimmt (siehe nächste Folie)

Beweis (Fortsetzung)

- Wegen $k(f_{K_1}) + \dots + k(f_{K_\ell}) = k(g - f) = k(g) - k(f) < 0$ und $k(f_{K_i}) = \sum_{e \in K_i} f_{K_i}(e)k(e) = w_i k(K_i)$ muss mindestens ein Kreis K_i negativ sein
- Um für $i = 0, \dots, \ell - 1$ den Fluss $f_{K_{i+1}}$ und den zugehörigen Kreis K_{i+1} zu finden, wählen wir eine beliebige Kante $e_{i,1}$ aus E_f , für die der Fluss $r_i = h - f_{K_1} - \dots - f_{K_i}$ einen minimalen positiven Wert $w_i = r_i(e_{i,1}) > 0$ annimmt
- Falls es keine Kante $e \in E_f$ mit $r_i(e) > 0$ gibt, sind wir fertig, weil dann r_i der Nullfluss mit $r_i(e) = 0$ für alle $e \in V \times V$ und somit $\ell = i$ ist
- Andernfalls benutzen wir die Tatsache, dass r_i wie h und die bereits gefundenen Flüsse f_{K_1}, \dots, f_{K_i} den Wert 0 hat, um einen negativen Kreis K_{i+1} zu finden
- Wegen $|r_i| = 0$ erfüllt r_i nämlich die Kontinuitätsbedingung auch für die Knoten s und t

Beweis (Schluss)

- Daher können wir K_{i+1} wie folgt konstruieren
 - Beginnend mit $j = 1$ wählen wir zu jeder Kante $e_{i,j} = (u, v)$ solange eine Fortsetzung $e_{i,j+1} = (v, w) \in E_f$ mit $r_i(e_{i,j+1}) > 0$, bis sich ein Kreis K_{i+1} schließt
- Nun setzen wir $f_{K_{i+1}}(e_{i,j}) = w_i$ für alle Kanten $e_{i,j}$ auf dem Kreis K_{i+1} und $f_{K_{i+1}}(e_{i,j}) = 0$ für alle Kanten außerhalb von K_{i+1}
- Da die Anzahl der Kanten in E_f , die unter dem Fluss r_{i+1} den Wert 0 haben, gegenüber r_i mindestens um eins zunimmt, ist die Anzahl ℓ der gefundenen Kreise durch $\ell \leq |E_f| \leq 2m$ beschränkt □

Mithilfe von obigem Lemma lässt sich nun ein maximaler Fluss mit minimalen Kosten wie folgt berechnen

- Wir berechnen zuerst einen maximalen Fluss f und setzen $f_0 = f$
- Dann berechnen wir für $i = 0, 1, \dots$ einen negativen Kreis K_{i+1} in N_{f_i}
- Hierzu fügen wir dem Digraphen (V, E_{f_i}, k) einen neuen Knoten s' hinzu und verbinden s' mit allen Knoten $u \in V$ durch eine neue Kante (s', u) mit $k(s', u) = 0$
- Dann suchen wir mit dem Bellman-Ford-Moore (BFM) Algorithmus in dem resultierenden Digraphen $G_i = (V \cup \{s'\}, E_{f_i} \cup \{(s', u) \mid u \in V\}, k)$ nach einem negativen Kreis K_{i+1}
- Falls es in G_i keinen negativen Kreis gibt, ist f_i ein maximaler Fluss in N mit minimalen Kosten
- Andernfalls benutzen wir den Fluss $f_{K_{i+1}}$, der auf jeder Kante e auf K_{i+1} den Wert $f_{K_{i+1}}(e) = c_{f_i}(K_{i+1}) = \min\{c_{f_i}(e) \mid e \in K_{i+1}\}$ und außerhalb von K_{i+1} den Wert 0 hat, um den Fluss $f_{i+1} = f_i + f_{K_{i+1}}$ zu erhalten

Kostenoptimale Flüsse

- Da sich die Kosten von f_i wegen

$$k(f_{i+1}) - k(f_i) = k(f_{K_{i+1}}) - k(K_{i+1}) \leq -1$$

bei jeder Iteration um mindestens eins verringern und die Kostendifferenz zwischen zwei beliebigen Flüssen in N_f durch

$$D = \sum_{e \in E} |k(e)| (c(e) + c(e^R))$$

beschränkt ist, ist f_ℓ nach $\ell \leq D$ Iterationen ein kostenminimaler Fluss

- Da der BFM-Algorithmus in Zeit $O(mn)$ läuft, führt dies auf eine Laufzeit von $O(Dmn)$, um die Kosten von f_0 zu minimieren
- Berechnen wir f_0 mit Dinitz in Zeit $O(n^3)$, so erhalten wir folgenden Satz

Satz

In einem Netzwerk N kann ein maximaler Fluss f mit minimalen Kosten in Zeit $O(n^3 + Dmn)$ bestimmt werden

Kostenoptimale Flüsse

Das nächste Lemma zeigt einen Weg, wie sich in einem Netzwerk ohne negative Kreise ein maximaler Fluss f mit minimalen Kosten in Zeit $O(|f|mn)$ berechnen lässt

Lemma. Sei f_i ein Fluss in N mit $k(f_i) = k_{\min}(f_i)$

Dann ist $f_{i+1} = f_i + f_{P_{i+1}}$ für jeden Zunahmepfad P_{i+1} in N_{f_i} mit

$$k(P_{i+1}) = \min\{k(P') \mid P' \text{ ist ein Zunahmepfad in } N_{f_i}\}$$

ein Fluss in N mit $k(f_{i+1}) = k_{\min}(f_{i+1})$

Beweis.

- Unter der Annahme, dass $k(f_{i+1}) > k_{\min}(f_{i+1})$ ist, gibt es nach obigem Lemma einen negativen Kreis K in $N_{f_{i+1}}$
- Wir benutzen K , um P_{i+1} in einen Zunahmepfad P' in N_{f_i} mit $k(P') < k(P_{i+1})$ zu transformieren

Beweis (Fortsetzung)

- Sei $F = K + P_{i+1}$ die Multimenge aller Kanten, die auf K oder P_{i+1} liegen, d.h. jede Kante in $K \Delta P_{i+1} = (K \setminus P_{i+1}) \cup (P_{i+1} \setminus K)$ kommt genau einmal und jede Kante in $K \cap P_{i+1}$ kommt genau 2-mal in F vor
- F ist also ein Multigraph bestehend aus dem s - t -Pfad P_{i+1} in N_{f_i} und dem Kreis K in $N_{f_{i+1}}$ und es gilt $k(F) = k(P_{i+1}) + k(K) < k(P_{i+1})$
- Um in F einen s - t -Pfad P' von N_{f_i} mit $k(P') < k(P_{i+1})$ zu finden, entfernen wir wie folgt alle Kanten in $\hat{F} = F \setminus E_{f_i} = K \setminus E_{f_i}$ aus F
- Wegen $\hat{F} \subseteq K \setminus P_{i+1}$ kommt jede Kante $e \in \hat{F}$ genau einmal in F vor
- Zudem wird jede Kante $e \in \hat{F}$ wegen
 - $f_i(e) = c(e)$ (da $e \notin E_{f_i}$) zwar von f_i , aber wegen
 - $e \in K \subseteq E_{f_{i+1}}$ nicht von f_{i+1} gesättigt
- Daher muss $f_i(e) \neq f_{i+1}(e)$ und somit $e^R \in P_{i+1}$ sein (da $e \notin P_{i+1}$)
- Wegen $e^R \in P_{i+1} \setminus K$ (da $e \in K$) kommt also für jede Kante $e \in \hat{F}$ auch e^R genau einmal in F vor

Beweis (Schluss)

- Entfernen wir nun alle solchen Kantenpaare e, e^R aus F , so erhalten wir die Multimenge $F' = F \setminus (\hat{F} \cup \hat{F}^R) \subseteq E_{f_i}$, die wegen $k(e) + k(e^R) = 0$ dieselben Kosten $k(F') = k(F) < k(P_{i+1})$ wie F hat
- Da F' zudem aus F durch Entfernen von Kreisen (der Länge 2) entsteht, ist F' wie F ein Multigraph, der sich in einen s - t -Pfad P' und eine gewisse Anzahl $\ell \geq 0$ von Kreisen K_1, \dots, K_ℓ in N_{f_i} zerlegen lässt
- Da nach Voraussetzung keine negativen Kreise in N_{f_i} existieren, folgt

$$k(P') = k(F') - \sum_{i=1}^{\ell} k(K_i) \leq k(F') = k(F) < k(P_{i+1})$$

□

- Basierend auf obigem Lemma können wir nun folgenden Algorithmus zur Bestimmung eines maximalen Flusses mit minimalen Kosten in einem Netzwerk N angeben, das keine negativen Kreise enthält

Algorithmus Min-Cost-Flow(V, E, s, t, c, k)

```
1 for all  $(u, v) \in V \times V$  do  
2    $f(u, v) := 0$   
3 while  $P := \text{min-zunahmepfad}(f) \neq \perp$  do  
4    $\text{addierepfad}(f, P)$ 
```

- Hierbei berechnet die Prozedur $\text{min-zunahmepfad}(f)$ einen Zunahmepfad P in N_f mit minimalen Kosten
- Da dann der Fluss $f' = f + f_P$ nach obigem Lemma minimale Kosten $k(f') = k_{\min}(f')$ in N hat, hat auch $N_{f'}$ keine negativen Kreise
- Daher kann P bspw. mit dem BFM-Algorithmus berechnet werden, der in Zeit $O(mn)$ läuft
- Dies führt auf eine Gesamtlaufzeit von $O(Mmn)$, wobei $M = |f|$ die Größe eines maximalen Flusses f in N ist

Kostenoptimale Flüsse

Tatsächlich lässt sich für Netzwerke ohne negative Kreise die Laufzeit unter Verwendung des Dijkstra-Algorithmus in Kombination mit einer Preisfunktion auf $O(mn + |f|m \log n)$ verbessern

Satz. Sei $N = (V, E, s, t, c, k)$ ein Netzwerk ohne negative Kreise

Dann lässt sich in N ein maximaler Fluss f mit minimalen Kosten in Zeit $O(mn + |f|m \log n)$ berechnen

Definition. Sei $G = (V, E, k)$ ein Digraph mit Kostenfunktion $k : E \rightarrow \mathbb{Z}$

- Eine Funktion $p : V \rightarrow \mathbb{Z}$ heißt **Preisfunktion** für G , falls für jede Kante $e = (u, v)$ in E gilt:

$$p(v) - p(u) \leq k(u, v)$$

- Die **p -reduzierte Kostenfunktion** $k^p : E \rightarrow \mathbb{N}$ ist

$$k^p(u, v) = k(u, v) + p(u) - p(v)$$

Lemma

- Ein Digraph $G = (V, E, k)$ mit Kostenfunktion $k : E \rightarrow \mathbb{Z}$ hat genau dann keine negativen Kreise, wenn es eine Preisfunktion p für G gibt
- Zudem lässt sich eine geeignete Preisfunktion p in Zeit $O(mn)$ finden

Beweis.

- Wir zeigen zuerst die Rückwärtsrichtung
- Sei also p eine Preisfunktion mit $k^p(e) \geq 0$ für alle $e \in E$
- Dann gilt für jede Kantenmenge $F \subseteq E$ die Ungleichung $k^p(F) \geq 0$
- Da zudem für jeden Kreis K in G die Gleichheit $k(K) = k^p(K)$ gilt, folgt $k(K) = k^p(K) \geq 0$
- Für die Vorwärtsrichtung sei nun $G = (V, E, k)$ ein Digraph ohne negative Kreise

Beweis (Fortsetzung)

- Betrachte den Digraphen $G' = (V', E', k')$, der aus G durch Hinzunahme eines Knotens s' und von Kanten (s', x) mit $k'(s', x) = 0$ für alle $x \in V$ entsteht
- Dann gibt es auch in G' keine negativen Kreise und wir können mit BFM für jeden Knoten $x \in V$ einen bzgl. k' kürzesten Pfad P_x von s nach x in Zeit $O(mn)$ berechnen
- Setzen wir $p(x)$ gleich der Länge von P_x , so gilt für jede Kante $e = (u, v) \in E$ die Ungleichung

$$p(v) \leq p(u) + k(u, v),$$

d.h. $p(x)$ ist die gesuchte Preisfunktion für G



Kostenoptimale Flüsse

- Um einen maximalen Fluss mit minimalen Kosten in einem Netzwerk $N = (V, E, s, t, c, k)$ in Zeit $O(mn + |f|m \log n)$ zu berechnen, rufen wir zuerst BFM mit Startknoten s' auf, um nach einem negativen Kreis K im erweiterten Digraphen $G' = (V', E', k')$ zu suchen
- Wird K nicht gefunden, berechnet BFM hierbei eine Preisfunktion p_0 für das Netzwerk $N_0 = N_{f_0} = N$, wobei f_0 der Nullfluss in N ist
- Nun können wir mit Dijkstra für $i = 0, 1, \dots$ in Zeit $O(m \log n)$
 - einen bzgl. k^{P_i} kürzesten Zunahmepfad P_{i+1} in $N_{f_i}^{P_i}$ und
 - einen Fluss $f_{i+1} = f_i + f_{P_{i+1}}$ der Größe $|f_{i+1}| > |f_i|$ mit minimalen Kosten $k(f_{i+1}) = k_{min}(f_{i+1})$
 - sowie eine Preisfunktion p_{i+1} für $N_{f_{i+1}}$ berechnen
- Ein bzgl. k^{P_i} kürzester s - t -Pfad P ist nämlich auch bzgl. k ein kürzester s - t -Pfad, da $k^{P_i}(P) = k(P) + p_i(s) - p_i(t)$ und $p_i(s) - p_i(t)$ eine von P unabhängige Konstante ist

- Zudem lässt sich aus p_i nach folgendem Lemma eine Preisfunktion $p_{i+1} = p_i + \ell_i$ für k in $N_{f_{i+1}}$ finden, wobei $\ell_i(x)$ die minimale Pfadlänge von s nach x in $N_{f_i}^{p_i}$ ist
- Dabei kann ℓ_i und somit auch p_{i+1} von Dijkstra zusammen mit P_{i+1} ohne nennenswerten Mehraufwand gleich mitberechnet werden

Lemma

- Sei $\ell_i(x)$ die minimale Pfadlänge von s nach x in N_{f_i} bzgl. k^{p_i} , wobei $p_i : V \rightarrow \mathbb{Z}$ eine beliebige Funktion ist
- Dann ist $p_{i+1}(x) = p_i(x) + \ell_i(x)$ eine Preisfunktion für k in $N_{f_{i+1}}$

Beweis.

- Wir zeigen zuerst, dass p_{i+1} eine Preisfunktion für k in N_{f_i} ist

Kostenoptimale Flüsse

Beweis (Fortsetzung)

- Da $\ell_i(v) \leq \ell_i(u) + k^{P_i}(e)$ und $k^{P_i}(e) = k(e) + p_i(u) - p_i(v)$ für jede Kante $e = (u, v) \in E_{f_i}$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} k^{P_{i+1}}(e) &= k(e) + p_{i+1}(u) - p_{i+1}(v) \\ &= k(e) + p_i(u) + \ell_i(u) - p_i(v) - \ell_i(v) \\ &= k^{P_i}(e) + \ell_i(u) - \ell_i(v) \geq 0 \end{aligned}$$

d.h. p_{i+1} ist eine Preisfunktion für k in N_{f_i}

- Falls e auf P_{i+1} liegt, gilt sogar $k^{P_{i+1}}(e) = 0$, da P_{i+1} ein bzgl. k^{P_i} kürzester s - t -Pfad in N_{f_i} und daher $\ell_i(v) = \ell_i(u) + k^{P_i}(e)$ ist
- Da zudem für jede Kante e in $N_{f_{i+1}}$, die nicht zu N_{f_i} gehört, die Kante e^R auf dem Pfad P_{i+1} liegt, folgt wegen $k^{P_{i+1}}(e^R) = 0$,

$$\begin{aligned} k^{P_{i+1}}(e) &= k(e) + p_{i+1}(u) - p_{i+1}(v) \\ &= -k(e^R) - p_{i+1}(v) + p_{i+1}(u) = -k^{P_{i+1}}(e^R) = 0 \end{aligned}$$

d.h. p_{i+1} ist auch eine Preisfunktion für k in $N_{f_{i+1}}$

