Graphalgorithmen

Johannes Köbler

Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

SS 2021

Organisatorisches

Aktuelle Infos auf der VL-Webseite unter

- ***https://hu.berlin/graphalgo***

bzw.

- ***https://www.informatik.hu-berlin.de/de/forschung/gebiete/algorithmenII/Lehre/ss21/graphalgo***

Ablauf

Skript, Folien und Aufgabenblätter

- Skript, Folien und Aufzeichnung werden jeweils nach der Vorlesung ins Netz (Webseite bzw. Moodle) gestellt
- Übungsblätter werden in der Regel donnerstags veröffentlicht
- Die Besprechung der mündlichen Aufgaben erfolgt am Donnerstag der Folgewoche
- Lösungen dazu können bis zum Tag davor in Moodle hochgeladen werden, Details siehe dort
- Die schriftlichen Aufgaben sind bis Donnerstag zwei Wochen nach Ausgabe um 13:00 Uhr abzugeben
- Fragen zu Übung und Vorlesung können im Moodle-Forum auch asynchron gestellt und diskutiert werden

Übungen

Anmeldung

- über Agnes
- und bei Moodle (wegen Punktevergabe und Bildung von Abgabegruppen)
- Mails von Agnes und von Moodle werden standardmäßig an den HU-Account gesendet (bitte regelmäßig checken)

Ausgabe der Aufgabenblätter

- über Moodle und auf der VL-Webseite

Abgabe von Lösungen

- digital über Moodle

Bearbeitung der Übungsaufgaben

- in Gruppen von bis zu drei Teilnehmern
- Lösungen für die schriftlichen Aufgaben sollten als PDF abgegeben werden
- die Abgabe von Lösungsvorschlägen für die mündlichen Aufgaben ist freiwillig und geht nicht in die Punktewertung ein
- Lösungsvorschläge für die mündlichen Aufgaben können auch per Texteingabe gemacht werden
- besonders gut gelungene Lösungen werden mit Zustimmung der/des Abgebenden im Forum veröffentlicht

Übungsschein und Prüfung

Scheinkriterien

- Lösen von mindestens 50% der schriftlichen Aufgaben

Prüfungsform

- voraussichtlich mündlich
- Der Übungsschein ist ***nicht*** Prüfungsvoraussetzung

Gibt es zum organisatorischen Ablauf noch Fragen?

Einführung

- Viele praktisch relevante Problemstellungen lassen sich durch graphentheoretische Probleme modellieren, wie zum Beispiel
  - Finden kürzester Wege zwischen Städten
  - Berechnung von Flüssen und Schnitten in Netzwerken
  - Zuordungsprobleme (Berechnung von Matchings)
  - Färbungsprobleme (Knoten- und Kantenfärbungen)
  - planare Einbettungen von Schaltkreisen usw.
- in der Graphentheorie werden kombinatorische Eigenschaften von Graphen erforscht
- in diesem Modul steht der Entwurf von effizienten Algorithmen auf Graphen im Mittelpunkt

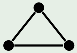
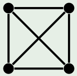
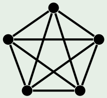
Graphentheoretische Grundlagen

Definition

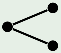
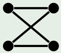
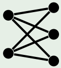
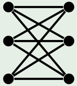
- Ein ***(ungerichteteter) Graph*** ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei
  V - eine endliche Menge von Knoten/Ecken und
  E - die Menge der Kanten ist
- Hierbei gilt $E \subseteq \binom{V}{2} := \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$
- Die ***Nachbarschaft*** von $v \in V$ ist $N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$
- Der ***Grad*** von v ist $\deg_G(v) = \|N_G(v)\|$
- Der ***Minimalgrad*** von G ist $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg_G(v)$ und der ***Maximalgrad*** von G ist $\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg_G(v)$
- Im Fall $\delta(G) = \Delta(G) = k$ heißt G ***k-regulär***
- Jeder Knoten $u \in V$ vom Grad ≤ 1 heißt ***Blatt*** und die übrigen Knoten (vom Grad ≥ 2) heißen ***innere Knoten*** von G
- Falls G aus dem Kontext ersichtlich ist, lassen wir den Index G weg und schreiben auch einfach $N(v)$, $\deg(v)$, δ usw.

Beispiel

- Der ***vollständige Graph*** (V, E) auf n Knoten, d.h. $\|V\| = n$ und $E = \binom{V}{2}$, wird mit K_n und der ***leere Graph*** $(V, \emptyset)$ auf n Knoten wird mit E_n bezeichnet:

K_1  K_2  K_3  K_4  K_5 

- Der ***vollständige bipartite Graph*** (A, B, E) auf $a + b$ Knoten, d.h. $A \cap B = \emptyset$, $\|A\| = a$, $\|B\| = b$ und $E = \{\{u, v\} \mid u \in A, v \in B\}$ wird mit $K_{a,b}$ bezeichnet:

$K_{1,1}$  $K_{1,2}$  $K_{2,2}$  $K_{2,3}$  $K_{3,3}$ 

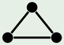
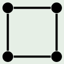
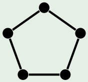
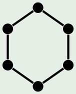
Graphentheoretische Grundlagen

Beispiel (Fortsetzung)

- Der ***Pfad*** mit n Knoten wird mit P_n bezeichnet:

P_2  P_3  P_4  P_5 

- Der ***Kreis*** mit n Knoten wird mit C_n bezeichnet:

C_3  C_4  C_5  C_6 

◁

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ heißt ***unabhängig*** oder ***stabil***, wenn es keine Kante von G mit beiden Endpunkten in U gibt, d.h. es gilt $E \cap \binom{U}{2} = \emptyset$
- Die ***Stabilitätszahl*** ist

$$\alpha(G) = \max\{\|U\| \mid U \text{ ist stabile Menge in } G\}$$

- Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ heißt ***Clique***, wenn jede Kante mit beiden Endpunkten in U in E ist, d.h. es gilt $\binom{U}{2} \subseteq E$
- Die ***Cliquenzahl*** ist

$$\omega(G) = \max\{\|U\| \mid U \text{ ist Clique in } G\}$$

Definition (Fortsetzung)

- Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt ***Sub-/Teil-/Untergraph*** von $G = (V, E)$, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ ist
- Im Fall $V' = V$ wird G' auch ein ***(auf)spannender*** Teilgraph von G genannt und wir schreiben für G' auch $G - E''$ (bzw. $G = G' \cup E''$), wobei $E'' = E - E'$ die Menge der aus G entfernten Kanten ist
- Im Fall $E'' = \{e\}$ schreiben wir für G' auch einfach $G - e$ (bzw. $G = G' \cup e$)
- Ein k-regulärer spannender Teilgraph von G wird auch als ***k-Faktor*** von G bezeichnet
- Ein d-regulärer Graph G heißt ***k-faktorisierbar***, wenn sich G in $\ell = d/k$ kantendisjunkte k-Faktoren $G_1, \ldots, G_\ell$ zerlegen lässt

Definition (Fortsetzung)

- Ein Subgraph $G' = (V', E')$ von $G = (V, E)$ heißt (***durch*** V') ***induziert***, falls $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ ist
- Für G' schreiben wir dann auch $G[V']$ oder $G - V''$, wobei $V'' = V - V'$ die Menge der aus G entfernten Knoten ist
- Ist $V'' = \{v\}$, so schreiben wir für G' auch einfach $G - v$ und im Fall $V' = \{v_1, \ldots, v_k\}$ auch $G[v_1, \ldots, v_k]$
- Ein ***Weg*** ist eine Folge von (nicht notwendig verschiedenen) Knoten $v_0, \ldots, v_\ell$ mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $i = 0, \ldots, \ell - 1$
- Die ***Länge*** des Weges ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten, also ℓ
- Im Fall $\ell = 0$ heißt der Weg ***trivial***
- Ein Weg $(v_0, \ldots, v_\ell)$ heißt auch v_0-v_ℓ-***Weg***

Definition (Fortsetzung)

- G heißt ***zusammenhängend***, falls es für alle Paare $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ einen u-v-Weg gibt
- Die durch die Äquivalenzklassen $V_i \subseteq V$ der Relation

$$Z = \{(u, v) \in V \times V \mid \text{ es gibt in } G \text{ einen } u\text{-}v\text{-Weg}\}$$

induzierten Teilgraphen $G[V_i]$ heißen ***Zusammenhangskomponenten*** (engl. connected components) oder einfach ***Komponenten*** von G

- Ein u-v-Weg heißt ***einfach*** oder ***u-v-Pfad***, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.
- Ein ***Zyklus*** ist ein u-v-Weg mit $u = v$

Definition (Schluss)

- Eine Menge von Pfaden heißt
  - ***disjunkt***, wenn je zwei Pfade in der Menge keine gemeinsamen Knoten haben,
  - ***kantendisjunkt***, wenn je zwei Pfade in der Menge keine gemeinsamen Kanten haben, und
  - ***knotendisjunkt***, wenn je zwei Pfade in der Menge höchstens gemeinsame Endpunkte haben
- Ein ***Kreis*** ist ein Zyklus $(v_1 \ldots, v_\ell, v_1)$ der Länge $\ell \geq 3$, für den $v_1, \ldots, v_\ell$ paarweise verschieden sind
- Ein Graph heißt ***kreisfrei***, ***azyklisch*** oder ***Wald***, falls er keinen Kreis enthält
- Ein ***Baum*** ist ein zusammenhängender Wald

Definition

- Ein ***gerichteter Graph*** oder ***Digraph*** ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei
  V - eine endliche Menge von ***Knoten/Ecken*** und
  E - die Menge der ***Kanten*** ist
- Hierbei gilt $E \subseteq V \times V = \{(u, v) \mid u, v \in V\}$
- Kanten der Form (u, u) heißen ***Schlingen***
- Die ***Nachfolgermenge*** von $v \in V$ ist $N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$
- Die ***Vorgängermenge*** von v ist $N^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$
- Die ***Nachbarmenge*** von v ist $N(v) = N^+(v) \cup N^-(v)$
- Der ***Ausgangsgrad*** von v ist $\deg^+(v) = \|N^+(v)\|$ und der ***Eingangsgrad*** von v ist $\deg^-(v) = \|N^-(v)\|$
- Der ***Grad*** von v ist $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$
- Ein Knoten $w \in V$ vom Eingangsgrad $\deg^-(w) = 0$ heißt ***Wurzel*** von G, und ein Knoten $u \in V$ vom Ausgangsgrad $\deg^+(u) = 0$ heißt ***Blatt***

Definition (Fortsetzung)

- Ein ***(gerichteter) v_0-v_ℓ-Weg*** in G ist eine Folge von Knoten $v_0, \ldots, v_\ell$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \ldots, \ell - 1$
- Ein ***(gerichteter) Zyklus*** ist ein gerichteter u-v-Weg mit $u = v$
- Ein gerichteter Weg heißt ***einfach*** oder ***(gerichteter) Pfad***, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind
- Ein ***(gerichteter) Kreis*** in G ist ein gerichteter Zyklus $(v_1 \ldots, v_\ell, v_1)$ der Länge $\ell \geq 1$, für den $v_1, \ldots, v_\ell$ paarweise verschieden sind
- G heißt ***kreisfrei*** oder ***azyklisch***, wenn G keinen gerichteten Kreis hat
- G heißt ***gerichteter Wald***, wenn G kreisfrei ist und jeder Knoten $v \in V$ Eingangsgrad $\deg^-(v) \leq 1$ hat
- G heißt ***zusammenhängend***, wenn es in G für jedes Knotenpaar $u \neq v \in V$ einen u-v-Pfad oder einen v-u-Pfad gibt
- G heißt ***stark zusammenhängend***, wenn es in G für jedes Knotenpaar $u \neq v \in V$ sowohl einen u-v-Pfad als auch einen v-u-Pfad gibt

Datenstrukturen für Graphen

Definition

- Die ***Adjazenzmatrix*** eines Graphen bzw. Digraphen $G = (V, E)$ mit (geordneter) Knotenmenge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist die $(n \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})$ mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenzmatrix symmetrisch mit $a_{ii} = 0$ für $i = 1, \ldots, n$

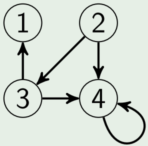
Definition (Fortsetzung)

- Bei der ***Adjazenzlisten-Darstellung*** wird für jeden Knoten v_i eine Liste mit seinen Nachbarn verwaltet
- Im gerichteten Fall verwaltet man entweder nur die Liste der Nachfolger oder zusätzlich eine weitere für die Vorgänger
- Falls die Anzahl der Knoten statisch ist, organisiert man die Adjazenzlisten in einem Feld, d.h. das Feldelement mit Index i verweist auf die Adjazenzliste von Knoten v_i
- Falls sich die Anzahl der Knoten dynamisch ändert, so werden die Adjazenzlisten typischerweise ebenfalls in einer doppelt verketteten Liste verwaltet

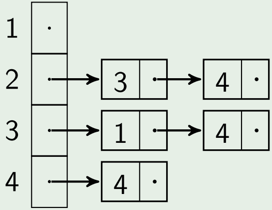
Datenstrukturen für Graphen

Beispiel

Betrachte den gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4\}$ und $E = \{(2, 3),\ (2, 4),\ (3, 1),\ (3, 4),\ (4, 4)\}$. Dieser hat folgende Adjazenzmatrix- und Adjazenzlisten-Darstellung:



	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	1
4	0	0	0	1



Färben von Graphen

Definition

- Eine Abbildung $f\colon\ V \to \{1,\ldots,k\}$ heißt ***k-Färbung*** (oder einfach ***Färbung***) von G, wenn $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u,v\} \in E$ gilt
- In diesem Fall heißt G ***k-färbbar***
- Die ***chromatische Zahl von G*** ist

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}$$

Beispiel

$$\chi(E_n) = 1,\ \chi(K_{n,m}) = 2,\ \chi(K_n) = n,$$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade} \\ 3, & \text{sonst} \end{cases}$$

Färben von Graphen

- Ein wichtiges Entscheidungsproblem ist, ob ein gegebener Graph k-färbbar ist
- Dieses Problem ist für jedes feste $k \geq 3$ schwierig

k-Färbbarkeit (k-COLORING):

Gegeben: Ein Graph G

Gefragt: Ist G k-färbbar?

Satz

k-COLORING ist für $k \geq 3$ NP-vollständig.

Das folgende Lemma setzt die chromatische Zahl $\chi(G)$ in Beziehung zur Stabilitätszahl $\alpha(G)$

Lemma

$n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1.$

Beweis.

- Sei G ein Graph und sei c eine $\chi(G)$-Färbung von G
- Da dann die Mengen $S_i = \{u \in V \mid c(u) = i\}$, $i = 1, \ldots, \chi(G)$, stabil sind, folgt $\|S_i\| \leq \alpha(G)$
- Somit gilt

$$n \;=\; \sum_{i=1}^{\chi(G)} \|S_i\| \;\leq\; \chi(G)\alpha(G)$$

Lemma

$n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$.

Beweis (Fortsetzung).

- Für den Beweis von $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$ sei S eine stabile Menge in G mit $\|S\| = \alpha(G)$
- Dann ist $G - S$ k-färbbar für ein $k \leq n - \|S\|$
- Da wir alle Knoten in S mit der Farbe $k + 1$ färben können, folgt $\chi(G) \leq k + 1 \leq n - \alpha(G) + 1$ $\square$

Beide Abschätzungen sind scharf, können andererseits aber auch beliebig schlecht werden

Färben von Graphen

Lemma

$\binom{\chi(G)}{2} \leq m$ und somit $\chi(G) \leq 1/2 + \sqrt{2m + 1/4}$

Beweis.

Zwischen je zwei Farbklassen einer optimalen Färbung muss es mindestens eine Kante geben $\square$

Die chromatische Zahl steht auch in Beziehung zur Cliquenzahl $\omega(G)$ und zum Maximalgrad $\Delta(G)$

Lemma

$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Färben von Graphen

Lemma

$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Beweis.

- Die erste Ungleichung folgt, da die Knoten einer größten Clique unterschiedliche Farben erhalten müssen
- Um die zweite Ungleichung zu erhalten, betrachten wir den

Algorithmus `greedy-color`

```
1  input ein Graph G = (V, E) mit V = {v_1, ..., v_n}
2  c(v_1) := 1
3  for i := 2 to n do
4      F_i := {c(v_j) | j < i, v_j ∈ N(v_i)}
5      c(v_i) := min{k ≥ 1 | k ∉ F_i}
```

- Da in Zeile 5 für die Farbe $c(v_i)$ von v_i nur $\|F_i\| \leq \Delta(G)$ Farben verboten sind, gilt $c(v_i) \leq \Delta(G) + 1$ □

Färben von planaren Graphen

- Ein Graph G heißt ***planar***, wenn er so in die Ebene einbettbar ist, dass sich zwei verschiedene Kanten höchstens in ihren Endpunkten berühren
- Dabei werden die Knoten von G als Punkte und die Kanten von G als Verbindungslinien (genauer: Jordankurven) zwischen den zugehörigen Endpunkten dargestellt
- Bereits im 19. Jahrhundert wurde die Frage aufgeworfen, wie viele Farben höchstens benötigt werden, um eine Landkarte so zu färben, dass aneinander grenzende Länder unterschiedliche Farben erhalten
- Offensichtlich lässt sich eine Landkarte in einen planaren Graphen transformieren, indem man für jedes Land einen Knoten zeichnet und benachbarte Länder durch eine Kante verbindet
- Länder, die sich nur in einem Punkt berühren, gelten dabei nicht als benachbart

Färben von planaren Graphen

- Die Vermutung, dass 4 Farben ausreichen, wurde 1878 von Kempe „bewiesen“ und erst 1890 entdeckte Heawood einen Fehler in Kempes „Beweis“
- Übrig blieb der 5-Farben-Satz
- Der 4-Farben-Satz wurde erst 1976 von Appel und Haken bewiesen
- Hierbei handelt es sich jedoch nicht um einen Beweis im klassischen Sinne, da zur Überprüfung der vielen auftretenden Spezialfälle Computer benötigt werden

Satz (Appel, Haken 1976)

Jeder planare Graph ist 4-färbbar

Färben von planaren Graphen

Satz (Appel, Haken 1976)

Jeder planare Graph ist 4-färbbar

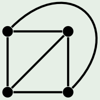
- Aus dem Beweis des 4-Farben-Satzes von Appel und Haken lässt sich ein 4-Färbungsalgorithmus für planare Graphen mit einer Laufzeit von $\mathcal{O}(n^4)$ gewinnen
- Im Jahr 1997 fanden Robertson, Sanders, Seymour und Thomas einen einfacheren Beweis für den 4-Farben-Satz, welcher zwar einen deutlich schnelleren $\mathcal{O}(n^2)$ Algorithmus liefert, aber ebenfalls nur mit Computer-Unterstützung verifizierbar ist

Färben von planaren Graphen

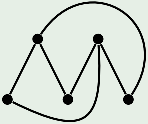
Beispiel

Wie die folgenden Einbettungen von K_4 und $K_{2,3}$ in die Ebene zeigen, sind diese Graphen planar

K_4 :



$K_{2,3}$:



◁

- Zur Beantwortung der Frage, ob auch K_5 und $K_{3,3}$ planar sind, betrachten wir die ***Gebiete***, die bei der Einbettung von (zusammenhängenden) Graphen in die Ebene entstehen
- Dabei gehören 2 Punkte zum selben Gebiet, falls es zwischen ihnen eine Verbindungslinie gibt, die keine Kante des eingebetten Graphen kreuzt oder berührt
- Nur eines dieser Gebiete ist unbeschränkt und dieses wird als ***äußeres Gebiet*** bezeichnet

Färben von planaren Graphen

- Die Anzahl der Gebiete von G bezeichnen wir mit $r(G)$ oder kurz mit r
- Die begrenzenden Kanten eines Gebietes g bilden den Rand von g
- Die Anzahl dieser Kanten bezeichnen wir mit $d(g)$, wobei Kanten, an die g von beiden Seiten grenzt, doppelt gezählt werden
- Der ***Rand*** *rand*(g) eines Gebiets g ist die (zirkuläre) Folge aller an g grenzenden Kanten, wobei die Kanten auf dem Rand von g so durchlaufen werden, dass g „in Fahrtrichtung links" liegt
- Dies hat zur Folge, dass jeder Knoten u, der über eine Kante e erreicht wird, über die im Uhrzeigersinn nächste Kante e' wieder verlassen wird
- Auf diese Weise erhalten wir für jeden Knoten u eine (zirkuläre) Ordnung π_u aller mit u inzidenten Kanten
- Wir nennen das Tripel $G' = (V, E, R)$ eine ***ebene Realisierung*** des Graphen $G = (V, E)$, falls es eine Einbettung von G in die Ebene gibt, deren Gebiete die Ränder in R haben
- In diesem Fall nennen wir $G' = (V, E, R)$ auch einen ***ebenen Graphen***

Färben von planaren Graphen

- Führen zwei Einbettungen von G in die Ebene auf dieselbe Randmenge R, so werden sie als ***äquivalent*** angesehen
- Eine andere Möglichkeit, Einbettungen bis auf Äquivalenz kombinatorisch zu beschreiben, besteht darin, für jeden Knoten u die (zirkuläre) Ordnung π_u aller mit u inzidenten Kanten anzugeben
- Man nennt $\pi = \{\pi_u \mid u \in V\}$ ein ***Rotationssystem*** für G, falls es eine entsprechende Einbettung gibt
- Rotationssysteme haben den Vorteil, dass sie in Adjazenzlisten-darstellung ohne zusätzlichen Platzaufwand gespeichert werden können, indem man die zu u adjazenten Knoten gemäß π_u anordnet
- Ist G nicht zusammenhängend, so betten wir die Komponenten von G in die Ebene ein und fassen alle Ränder, die bei diesen Einbettungen entstehen, zu einer Randmenge R zusammen
- Da jede Kante zur Gesamtlänge $\sum_g d(g)$ aller Ränder den Wert 2 beiträgt (sie wird genau einmal in jeder Richtung durchlaufen), folgt

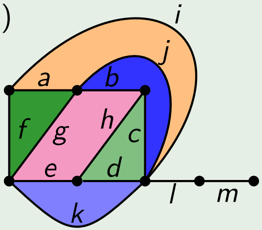
$$\sum_g d(g) = 2m(G)$$

Färben von planaren Graphen

Beispiel

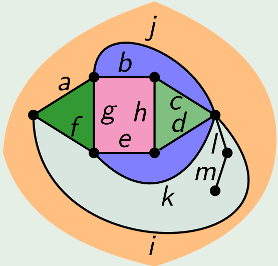
- Die nebenstehenden Einbettungen von $G = (V, E)$ in die Ebene haben 7 Gebiete mit den Rändern

$$R = \{(a, f, g), (a, j, i), (b, g, e, h), (b, c, j), (c, h, d), (d, e, k), (f, i, l, m, m, l, k)\}$$



- Der zugehörige ebene Graph ist $G' = (V, E, R)$ und das zugehörige Rotationssystem ist

$$\pi = \{(a, f, i), (a, j, b, g), (b, c, h), (e, k, f, g), (d, e, h), (c, j, i, l, k, d), (l, m), (m)\}$$



- Man beachte, dass sowohl in R als auch in π jede Kante genau zweimal vorkommt
- Anstelle von (zirkulären) Kantenfolgen kann man die Elemente von R und π natürlich auch durch entsprechende Knotenfolgen beschreiben

◁

Satz (Polyederformel von Euler, 1750)

Für einen zusammenhängenden ebenen Graphen $G = (V, E, R)$ gilt

$$n(G) - m(G) + r(G) = 2 \qquad (*)$$

Beweis durch Induktion über die Kantenzahl $m(G) = m$.

$m = 0$: Da G zusammenhängend ist, muss dann $n = 1$ sein

- Somit ist auch $r = 1$, also $(*)$ erfüllt

$m - 1 \rightsquigarrow m$: Sei G ein zusammenhängender ebener Graph mit m Kanten

- Ist G ein Baum, so entfernen wir ein Blatt und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen G' mit $n' = n - 1$ Knoten, $m' = m - 1$ Kanten und $r' = r$ Gebieten
- Nach IV folgt $n - m + r = (n-1) - (m-1) + r = n' - m' + r' = 2$
- Falls G kein Baum ist, entfernen wir eine Kante auf einem Kreis in G und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen G' mit $n' = n$ Knoten, $m' = m - 1$ Kanten und $r' = r - 1$ Gebieten
- Nach IV folgt $n - m + r = n - (m-1) + (r-1) = n' - m' + r' = 2$ $\square$

Färben von planaren Graphen

Korollar. Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten

Dann ist $m \leq 3n - 6$. Falls G dreiecksfrei ist, gilt sogar $m \leq 2n - 4$.

Beweis.

- O.B.d.A. sei G zusammenhängend
- Wir betrachten eine beliebige planare Einbettung von G
- Da $n \geq 3$ ist, ist jedes Gebiet g von $d(g) \geq 3$ Kanten umgeben
- Daher ist $2m = i = \sum_g d(g) \geq 3r$ bzw. $r \leq 2m/3$
- Eulers Formel liefert

  $$m = n + r - 2 \leq n + 2m/3 - 2,$$

  was $(1 - {}^2\!/_3)m \leq n - 2$ und somit $m \leq 3n - 6$ impliziert
- Wenn G dreiecksfrei ist, ist jedes Gebiet von $d(g) \geq 4$ Kanten umgeben
- Daher ist $2m = i = \sum_g d(g) \geq 4r$ bzw. $r \leq m/2$
- Eulers Formel liefert daher $m = n + r - 2 \leq n + m/2 - 2$, was $m/2 \leq n - 2$ und somit $m \leq 2n - 4$ impliziert $\square$

Korollar

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar

Beweis.

- Wegen $n(K_5) = 5$, also $3n(K_5) - 6 = 9$, und wegen $m(K_5) = \binom{5}{2} = 10$ gilt $m(K_5) \not\leq 3n(K_5) - 6$
- Wegen $n(K_{3,3}) = 6$, also $2n(K_{3,3}) - 4 = 8$, und wegen $m(K_{3,3}) = 3 \cdot 3 = 9$ gilt $m(K_{3,3}) \not\leq 2n(K_{3,3}) - 4$ $\square$

Färben von planaren Graphen

Als weitere interessante Folgerung aus der Polyederformel können wir zeigen, dass jeder planare Graph einen Knoten v vom Grad $\deg(v) \leq 5$ hat

Korollar

Jeder planare Graph hat einen Minimalgrad $\delta \leq 5$

Beweis.

- Für $n \leq 6$ ist die Behauptung klar
- Für $n > 6$ impliziert die Annahme $\delta \geq 6$ die Ungleichung

$$m = \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{u \in V} \deg(u) \geq \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{u \in V} 6 = 3n,$$

was im Widerspruch zu $m \leq 3n - 6$ steht $\square$

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und seien $u, v \in V$

- Durch ***Fusion*** von u und v entsteht aus G der Graph $G_{uv} = (V - \{v\}, E')$ mit

$$E' = \{e \in E \mid v \notin e\} \cup \{\{u, v'\} \mid \{v, v'\} \in E - \{u, v\}\}$$

- Ist $e = \{u, v\}$ eine Kante von G (also $e \in E$), so sagen wir auch, G_{uv} entsteht aus G durch ***Kontraktion*** der Kante e
- Hat zudem v den Grad 2 mit $N_G(v) = \{u, w\}$, so sagen wir auch, G_{uv} entsteht aus G durch ***Überbrückung*** des Knotens v bzw. G aus G_{uv} durch ***Unterteilung*** der Kante $\{u, w\}$

Definition (Fortsetzung)

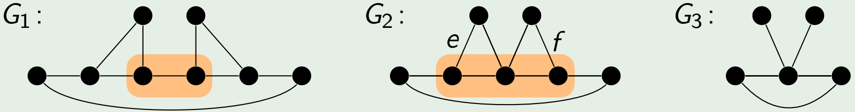
- G heißt zu H ***kontrahierbar***, falls der Graph H aus einer isomorphen Kopie von G durch wiederholte Kontraktionen gewonnen werden kann
- In diesem Fall nennen wir den Graphen H auch eine ***Kontraktion*** von G bzw. den Graphen G eine ***Expansion*** von H
- H heißt zu G ***unterteilbar***, falls G aus einer isomorphen Kopie von H durch wiederholte Unterteilungen von Kanten gewonnen werden kann
- In diesem Fall nennen wir G auch eine ***Unterteilung*** des Graphen H bzw. H eine ***Überbrückung*** des Graphen G

Definition (Schluss)

- H heißt ***Minor*** von G, wenn ein Teilgraph von G zu H kontrahierbar ist
- H heißt ***topologischer Minor*** von G, wenn ein Teilgraph G' von G eine Unterteilung von H ist (bzw. H eine Überbrückung von G' ist)
- G heißt ***H-frei***, falls H kein Minor von G ist
- Für eine Menge $\mathcal{H}$ von Graphen heißt G ***$\mathcal{H}$-frei***, falls kein $H \in \mathcal{H}$ ein Minor von G ist

Beispiel

Betrachte folgende Graphen:



- G_2 ist ein Minor von G_1, da G_2 durch Kontraktion der in G_1 umrandeten Kante entsteht; entsprechend ist G_3 ein Minor von G_2 und auch von G_1
- G_2 ist keine Unterteilung von G_3, da G_2 im Gegensatz zu G_3 Knoten vom Grad 3 hat
- Falls wir jedoch die beiden Kanten e und f aus G_2 entfernen, so ist der resultierende Teilgraph G_2' eine Unterteilung von G_3
- Somit ist G_3 ein topologischer Minor von G_2
- G_2 und G_3 sind aber keine topologischen Minoren von G_1, da G_2 und G_3 einen Knoten vom Grad 4 haben, aber G_1 nur Knoten vom Grad ≤ 3 $\triangleleft$

Färben von planaren Graphen

- Es ist klar, dass die Klasse $\mathcal{K}$ der planaren Graphen zwar unter Subgraphbildung, Kontraktion, Unterteilung und Überbrückung abgeschlossen ist, aber nicht unter Fusion
- Folglich ist jeder (topologische) Minor und jede Unterteilung eines planaren Graphen ebenfalls planar
- Nach Definition lässt sich jeder (topologische) Minor H von G aus einem zu G isomorphen Graphen durch wiederholte Anwendung folgender Operationen gewinnen:
  - Entfernen einer Kante oder eines Knotens
  - Kontraktion einer Kante (bzw. Überbrückung eines Knotens)
- Da die Kontraktionen (bzw. Überbrückungen) o.B.d.A. auch zuletzt ausgeführt werden können, gilt hiervon auch die Umkehrung
- Zudem ist leicht zu sehen, dass zwei Graphen G und H genau dann (topologische) Minoren voneinander sind, wenn sie isomorph sind

Färben von planaren Graphen

Satz (Kempe 1878, Heawood 1890)

Jeder planare Graph G ist 5-färbbar

Beweis durch Induktion über die Knotenzahl n von G.

$n = 1$: Klar

$n - 1 \rightsquigarrow n$: Sei G ein planarer Graph mit $n(G) = n$ Knoten

- Da G planar ist, existiert ein Knoten u mit $\deg(u) \leq 5$
- Nun konstruieren wir zu G wie folgt einen Minor G':
  - Im Fall $\deg(u) \leq 4$ sei $G' = G - u$, d.h. wir entfernen u aus G
  - Andernfalls hat u zwei Nachbarn v und w, die nicht durch eine Kante verbunden sind (andernfalls wäre K_5 ein Teilgraph von G)
  - In diesem Fall sei $G' = (G_{vu})_{vw}$, d.h. wir kontrahieren die beiden Kanten $\{u, v\}$ und $\{u, w\}$ zum Knoten v
- Da G' ein Minor von G ist, ist G' planar

Färben von planaren Graphen

Satz (Kempe 1878, Heawood 1890)

Jeder planare Graph G ist 5-färbbar

Beweis. (Fortsetzung)

- Da G' zudem höchstens $n-1$ Knoten hat, hat G' nach IV eine 5-Färbung c'
- Wir erweitern c' wie folgt zu einer 5-Färbung c von G
  - Im 2. Fall geben wir dem Knoten w die Farbe $c(w) = c'(v)$
  - Da nun in beiden Fällen die Nachbarn von u in G höchstens 4 verschiedene Farben haben, können wir auch u eine Farbe $c(u) \leq 5$ geben $\square$

Färben von planaren Graphen

- Kuratowski konnte 1930 beweisen, dass jeder nichtplanare Graph G den $K_{3,3}$ oder den K_5 als topologischen Minor enthält
- Für den Beweis benötigen wir folgende Notationen und ein Lemma

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Eine Menge $S \subseteq V$ heißt ***Separator*** in G, wenn es zwei Knoten $u, v \in V \setminus S$ gibt, zwischen denen in $G - S$ kein u-v-Weg existiert
- Ist $\|S\| = k$, so nennen wir S auch einen ***k-Separator*** zwischen u und v oder auch einen ***u-v-Separator der Größe k***
- Für $0 \leq k < n(G)$ heißt G ***k-zusammenhängend***, falls G keinen $(k-1)$-Separator hat
- Die größte Zahl $k < n(G)$, für die G k-zusammenhängend ist, heißt die ***Zusammenhangszahl*** von G und wird mit $\kappa(G)$ bezeichnet
- Ein Knoten $s \in V$ heißt ***Schnittknoten*** oder ***Artikulation*** von G, wenn es zwei Knoten $u, v \in V \setminus \{s\}$ gibt, so dass zwar $\{s\}$ ein u-v-Separator, aber $\emptyset$ kein u-v-Separator ist

Beispiel. Sei G ein Graph mit n Knoten

- $\kappa(G) = n - 1$ gilt genau dann, wenn $G = K_n$ ist
- $\kappa(G) \geq 1$ gilt genau dann, wenn G zusammenhängend und $n \geq 2$ ist
- $\kappa(G) = 1$ gilt genau dann, wenn G zusammenhängend ist und G mindestens einen Schnittknoten hat oder $G = K_2$ ist
- $\kappa(G) \geq 2$ gilt genau dann, wenn je 2 Knoten von G auf einem gemeinsamen Kreis liegen (siehe Übungen)

Färben von planaren Graphen

Lemma

Jeder Graph $G = (V, E)$, der nicht planar ist, hat einen

- 2-zusammenhängenden Untergraphen $U = (V', E')$ und einen
- 3-zusammenhängenden topologischen Minor $M = (V'', E'')$,

die ***minimal nicht planar*** sind, d.h. U und M sind nicht planar und für alle $e' \in E'$ und $e'' \in E''$ sind die Graphen $U - e'$ und $M - e''$ planar

Beweis.

- Wir entfernen zuerst solange Kanten und Knoten aus G, bis wir aus dem verbliebenen Teilgraphen $U = (V', E')$ keine weiteren Kanten oder Knoten entfernen können, ohne dass U planar wird
- U ist zusammenhängend, da andernfalls mindestens eine Komponente von U nicht planar ist und wir alle übrigen Komponenten entfernen könnten, ohne dass U planar wird
- U ist sogar 2-zusammenhängend

Färben von planaren Graphen

Beweis. (Fortsetzung)

- U ist sogar 2-zusammenhängend
- Sonst würde U einen Schnittknoten s enthalten und $U - s$ in $k \geq 2$ Komponenten $U[V_1], \ldots, U[V_k]$ zerfallen
- Dann wäre aber mindestens ein Teilgraph $T_i = U[V_i \cup \{s\}]$ nicht planar und wir könnten alle Knoten außerhalb von T_i entfernen, ohne dass U planar wird
- Um einen topologischen Minor M von G mit den behaupteten Eigenschaften zu erhalten, konstruieren wir zu U einen minimal nicht planaren topologischen Minor U', der 3-zusammenhängend ist oder weniger Knoten als U hat
- Indem wir diese Konstruktion wiederholen, erhalten wir schließlich M
- Falls U 3-zusammenhängend ist, ist $U' = U$

Färben von planaren Graphen

Beweis. (Schluss)

- Andernfalls gibt es in U einen 2-Separator $S = \{u, v\}$, d.h. $U - S$ zerfällt in $k \geq 2$ Komponenten $U[V_1], \ldots, U[V_k]$
- Betrachte die (2-zusammenhängenden) Graphen

$$G_i = U[V_i \cup \{u, v\}] \cup \{u, v\}, i = 1, \ldots, k$$

- Mindestens ein G_i ist nicht planar (z.B. G_1), da sonst U planar wäre
- Dann erhalten wir wie folgt einen zu G_1 isomorphen Graphen U' als topologischen Minor von $H = U[V_1 \cup V_2 \cup \{u, v\}]$ (und damit von U):
  - Wähle in $U[V_2 \cup \{u, v\}]$ einen beliebigen u-v-Pfad P,
  - entferne aus H alle Knoten und Kanten, die nicht auf P liegen und
  - überbrücke P zur Kante $\{u, v\}$
- Zudem hat U' weniger Knoten als U und ist wie U minimal nicht planar □

Definition. Sei G ein Graph und sei K ein Kreis in G

- Ein Teilgraph B von G heißt ***Brücke*** von K in G, falls
  - B nur aus einer Kante besteht, die zwei Knoten von K verbindet und nicht auf K liegt, oder
  - $B - K$ eine Komponente von $G - K$ ist und B aus $B - K$ durch Hinzufügen aller Kanten zwischen $B - K$ und K (und der zugehörigen Endpunkte auf K) entsteht
- Brücken, die nur aus einer Kante bestehen, werden auch als ***Sehnen*** von K bezeichnet

Färben von planaren Graphen

Definition (Fortsetzung)

- Die Knoten von B, die auf K liegen, heißen ***Kontaktpunkte*** von B
- Zwei Brücken B und B' von K heißen ***inkompatibel***, falls
  - B Kontaktpunkte u, v und B' Kontaktpunkte u', v' hat, so dass diese vier Punkte in der Reihenfolge u, u', v, v' auf K liegen, oder
  - B und B' mindestens 3 gemeinsame Kontaktpunkte haben

Es ist leicht zu sehen, dass in einem planaren Graphen kein Kreis mehr als zwei inkompatible Brücken haben kann

Färben von planaren Graphen

Satz. (Kuratowski 1930)

Für einen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) G ist planar

(ii) G enthält weder den $K_{3,3}$ noch den K_5 als topologischen Minor

Beweis.

- Die Implikation von (i) nach (ii) folgt aus der Abgeschlossenheit der planaren Graphen unter (topologischer) Minorenbildung
- Die Implikation von $ii)$ nach $i)$ zeigen wir durch Kontraposition
- Sei also $G = (V, E)$ nicht planar
- Dann hat G nach obigem Lemma einen 3-zusammenhängenden nicht planaren topologischen Minor $M = (V', E')$, so dass $M - e'$ für jede Kante $e' \in E'$ planar ist
- Wir entfernen eine beliebige Kante $e' = \{a_0, b_0\}$ aus M
- Dann ist $M - e'$ planar

Färben von planaren Graphen

Beweis. (Fortsetzung)

- Da $M - e'$ 2-zusammenhängend ist, gibt es in $M - e'$ einen Kreis K durch die beiden Knoten a_0 und b_0 (siehe Übungen)
- Wir wählen K zusammen mit einer ebenen Realisierung H' von $M - e'$ so, dass K möglichst viele Gebiete in H' einschließt
- Für zwei Knoten a, b auf K bezeichnen wir mit $K[a, b]$ die Menge aller Knoten, die in H' auf dem Bogen von a nach b (im Uhrzeigersinn) auf K liegen
- Zudem sei $K[a, b) = K[a, b] \setminus \{b\}$; die Mengen $K(a, b)$ und $K(a, b]$ sind analog definiert
- Die Kanten jeder Brücke B von K in $M - e'$ verlaufen in H' entweder alle innerhalb oder alle außerhalb von K
- Im ersten Fall nennen wir B eine ***innere Brücke*** und im zweiten eine ***äußere Brücke***

Beweis. (Fortsetzung)

- Es ist klar, dass K in H' mindestens eine innere und mindestens eine äußere Brücke haben muss (sonst könnten wir e' zu H' hinzufügen)
- Zudem hat jede äußere Brücke B genau zwei Kontaktpunkte: einen Knoten $u \in K(a_0, b_0)$ und einen Knoten $v \in K(b_0, a_0)$
- Andernfalls hätte B nämlich mindestens 2 Kontaktpunkte auf $K[a_0, b_0]$ oder auf $K[b_0, a_0]$
- Daher könnten wir K zu einem Kreis K' erweitern, der in H' mehr Gebiete einschließt (bzw. ausschließt) als K, was der Wahl von K und H' widerspricht
- Da M 3-zusammenhängend ist, muss B zudem eine Sehne $\{u, v\}$ sein
- K hat in M außer den Brücken in $M - e'$ noch zusätzlich die Brücke e'
- Wir wählen nun eine innere Brücke B, die sowohl zu e' als auch zu mindestens einer äußeren Brücke $e'' = \{a_1, b_1\}$ inkompatibel ist

Beweis. (Fortsetzung)

- Eine solche Brücke muss es geben, da wir sonst alle mit e' inkompatiblen inneren Brücken nach außen klappen und e' als innere Brücke hinzunehmen könnten, ohne die Planarität zu verletzen
- Wir benutzen K und die drei Brücken e', e'' und B, um eine Unterteilung des $K_{3,3}$ oder des K_5 in M zu finden
- Hierzu geben wir entweder
  - zwei disjunkte Mengen $A_1, A_2 \subseteq V'$ mit jeweils 3 Knoten an, so dass 9 knotendisjunkte Pfade mit je einem Endpunkt $a \in A_1$ und einem Endpunkt $b \in A_2$ existieren, oder
  - wir geben eine Menge $A \subseteq V'$ mit fünf Knoten an, so dass 10 knotendisjunkte Pfade mit je zwei Endpunkten $a, b \in A$ existieren
- Da e' und e'' inkompatibel sind, können wir annehmen, dass die vier Knoten a_0, a_1, b_0, b_1 in dieser Reihenfolge auf K liegen

Beweis. (Fortsetzung)

Fall 1: B hat einen Kontaktpunkt $k_1 \notin \{a_0, a_1, b_0, b_1\}$

- Aus Symmetriegründen können wir $k_1 \in K(a_0, a_1)$ annehmen
- Da B weder zu e' noch zu e'' kompatibel ist, hat B weitere Kontaktpunkte $k_2 \in K(b_0, a_0)$ und $k_3 \in K(a_1, b_1)$, wobei $k_2 = k_3$ sein kann

Fall 1a: Ein Knoten $k_i \in \{k_2, k_3\}$ liegt auf dem Bogen $K(b_0, b_1)$

- In diesem Fall existieren 9 knotendisjunkte Pfade zwischen $\{a_0, a_1, k_i\}$ und $\{b_0, b_1, k_1\}$

Fall 1b: $K(b_0, b_1) \cap \{k_2, k_3\} = \emptyset$

- In diesem Fall ist $k_2 \in K[b_1, a_0)$ und $k_3 \in K(a_1, b_0]$
- Dann gibt es in B einen Knoten u, von dem aus 3 knotendisjunkte Pfade zu $\{k_1, k_2, k_3\}$ existieren
- Folglich gibt es 9 knotendisjunkte Pfade zwischen $\{a_0, a_1, u\}$ und $\{k_1, k_2, k_3\}$

Beweis. (Fortsetzung)

Fall 2: Alle Kontaktpunkte von B liegen in der Menge $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$

- Da B inkompatibel zu e' und e'' ist, müssen in diesem Fall alle vier Knoten a_0, a_1, b_0, b_1 zu B gehören
- Sei P_0 ein a_0-b_0-Pfad in B und sei P_1 ein a_1-b_1-Pfad in B
- Sei u der erste Knoten auf P_0, der auch auf P_1 liegt und sei v der letzte solche Knoten

Fall 2a: $u = v$

- Dann gibt es in B vier knotendisjunkte Pfade von u zu den vier Knoten a_0, a_1, b_0, b_1
- Somit existieren in M 10 knotendisjunkte Pfade zwischen den Knoten u, a_0, a_1, b_0, b_1

Färben von planaren Graphen

Beweis. (Schluss)

Fall 2: Alle Kontaktpunkte von B liegen in der Menge $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$

- Da B inkompatibel zu e' und e'' ist, müssen in diesem Fall alle vier Knoten a_0, a_1, b_0, b_1 zu B gehören
- Sei P_0 ein a_0-b_0-Pfad in B und sei P_1 ein a_1-b_1-Pfad in B
- Sei u der erste Knoten auf P_0, der auch auf P_1 liegt und sei v der letzte solche Knoten

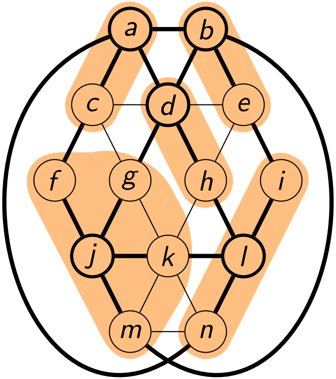
Fall 2b: $u \neq v$

- Durch u und v wird der Pfad P_1 in drei Teilpfade P_{xu}, P_{uv} und P_{vy} unterteilt, wobei die Indizes die Endpunkte bezeichnen und $\{x, y\} = \{a_1, b_1\}$ ist
- Somit gibt es in B drei Pfade zwischen u und jedem Knoten in $\{a_0, v, x\}$ und zwei Pfade zwischen v und jedem Knoten in $\{b_0, y\}$, die alle 5 knotendisjunkt sind
- Folglich gibt es in M 9 knotendisjunkte Pfade zwischen $\{a_0, v, x\}$ und $\{b_0, y, u\}$ $\square$

Färben von planaren Graphen

Beispiel

- Der nebenstehende Graph ist nicht planar, da wir den K_5 durch Kontraktion der farblich unterlegten Teilgraphen als Minor von G erhalten
- Alternativ lässt sich der K_5 auch als ein topologischer Minor von G erhalten, indem wir die dünnen Kanten entfernen und in dem resultierenden Teilgraphen alle Knoten vom Grad 2 überbrücken ◁



Eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz von Kuratowski ist folgende Charakterisierung der Klasse der planaren Graphen

Korollar (Wagner 1937)

Ein Graph G ist genau dann planar, wenn er $\{K_{3,3}, K_5\}$-frei ist

Beweis.

- Falls G planar ist, kann G weder den $K_{3,3}$ noch den K_5 als Minor enthalten
- Falls G weder den $K_{3,3}$ noch den K_5 als Minor enthält, ist G nach Kuratowski planar, da G diese Graphen dann auch nicht als topologische Minoren enthalten kann $\square$

Färben von planaren Graphen

Satz (Robertson und Seymour, 1983-2004)

Für jede Graphklasse $\mathcal{K}$, die unter Minorenbildung abgeschlossen ist, gibt es eine endliche Menge $\mathcal{H}$ von Graphen mit

$$\mathcal{K} = \{G \mid G \text{ ist } \mathcal{H}\text{-frei}\}$$

- Die Graphen in $\mathcal{H}$ sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und heißen ***verbotene Minoren*** für die Klasse $\mathcal{K}$
- Eine interessante Folgerung aus diesem Satz ist, dass jede unendliche Graphklasse zwei Graphen G und H enthält, so dass H ein Minor von G ist
- Das Problem, für zwei gegebene Graphen G und H zu entscheiden, ob H ein Minor von G ist, ist zwar NP-vollständig (da sich das Hamiltonkreisproblem darauf reduzieren lässt)

Färben von planaren Graphen

Für einen festen Graphen H ist das Problem aber effizient entscheidbar

Satz (Robertson und Seymour, 1995)

Für jeden Graphen H gibt es einen $O(n^3)$-zeitbeschränkten Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen G entscheidet, ob er H-frei ist

Korollar

Die Zugehörigkeit zu jeder unter Minorenbildung abgeschlossenen Graphklasse $\mathcal{K}$ ist in Zeit $O(n^3)$ entscheidbar

- Der Entscheidungsalgorithmus für $\mathcal{K}$ lässt sich allerdings nur angeben, wenn wir die verbotenen Minoren für $\mathcal{K}$ kennen
- Leider ist der Beweis des Satzes auf der vorigen Folie in dieser Hinsicht nicht konstruktiv
- Daher führt der Nachweis, dass $\mathcal{K}$ unter Minorenbildung abgeschlossen ist, nicht automatisch zu einem effizienten Erkennungsalgorithmus für $\mathcal{K}$

Färben von chordalen Graphen

- Chordale Graphen treten in vielen Anwendungen auf, z.B. sind alle Intervall- und alle Splitgraphen chordal
- Wir werden sehen, dass sich für chordale Graphen effizient eine optimale Knotenfärbung berechnen lässt

Definition

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt ***chordal*** oder ***trianguliert***, wenn jeder Kreis $K = (u_1, \ldots, u_\ell, u_1)$ der Länge $\ell \geq 4$ in G mindestens eine Sehne hat

Färben von chordalen Graphen

- Ein Graph G ist also genau dann chordal, wenn er keinen induzierten Kreis der Länge $\ell \geq 4$ enthält (ein induzierter Kreis ist ein induzierter Teilgraph $G[V']$, $V' \subseteq V$, der ein Kreis ist)
- Dies zeigt, dass die Klasse der chordalen Graphen unter induzierter Teilgraphbildung abgeschlossen ist (aber nicht unter Teilgraphbildung)
- Jede solche Graphklasse $\mathcal{G}$ ist durch eine Familie von minimalen ***verbotenen induzierten Teilgraphen*** H_i charakterisiert, die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind
- Die Graphen H_i gehören also nicht zu $\mathcal{G}$, aber sobald wir einen Knoten daraus entfernen, erhalten wir einen Graphen in $\mathcal{G}$
- Die Klasse der chordalen Graphen hat die Familie der Kreise C_n der Länge $n \geq 4$ als verbotene induzierte Teilgraphen

Färben von chordalen Graphen

Definition

Ein x-y-Separator S heißt (inklusions-)minimal, wenn $S \setminus \{s\}$ für jedes $s \in S$ kein x-y-Separator ist

Lemma. Für einen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent:

1. G ist chordal
2. Jeder minimale x-y-Separator S in G ist eine Clique
3. Jedes Paar von nicht adjazenten Knoten x und y in G hat einen x-y-Separator S, der eine Clique ist

Beweis von 1 $\Rightarrow$ 2

- Angenommen, G hat einen minimalen x-y-Separator S, der zwei nicht adjazente Knoten u und v enthält
- Seien $G[V_1]$ und $G[V_2]$ die beiden Komponenten in $G - S$ mit $x \in V_1$ und $y \in V_2$

Färben von chordalen Graphen

Beweis von ❶ ⇒ ❷

- Angenommen, G hat einen minimalen x-y-Separator S, der zwei nicht adjazente Knoten u und v enthält
- Seien $G[V_1]$ und $G[V_2]$ die beiden Komponenten in $G - S$ mit $x \in V_1$ und $y \in V_2$
- Da S minimal ist, hat jeder der beiden Knoten u und v sowohl einen Nachbarn in V_1 als auch in V_2
- Betrachte die beiden Teilgraphen $G_i = G[V_i \cup \{u, v\}]$ ($i = 1, 2$) und wähle jeweils einen kürzesten u-v-Pfad P_i in G_i
- Da deren Länge ≥ 2 ist, ist $K = P_1 \cup P_2$ ein Kreis der Länge ≥ 4
- Nach Konstruktion von K ist zudem klar, dass K keine Sehnen in G hat

Färben von chordalen Graphen

Lemma

Für einen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent

1. G ist chordal
2. Jeder minimale x-y-Separator S in G ist eine Clique
3. Jedes Paar von nicht adjazenten Knoten x und y in G hat einen x-y-Separator S, der eine Clique ist

Beweis von 2 $\Rightarrow$ 3

Klar, da je zwei nicht adjazente Knoten x und y einen x-y-Separator S haben, und S eine Clique ist, wenn wir S inklusionsminimal wählen

Färben von chordalen Graphen

Lemma

Für einen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent

1. G ist chordal
2. Jeder minimale x-y-Separator S in G ist eine Clique
3. Jedes Paar von nicht adjazenten Knoten x und y in G hat einen x-y-Separator S, der eine Clique ist

Beweis von 3 $\Rightarrow$ 1

- Angenommen, G ist nicht chordal
- Dann gibt es in G einen induzierten Kreis K der Länge ≥ 4
- Seien x und y zwei beliebige nicht adjazente Knoten auf K und sei S ein x-y-Separator in G
- Dann muss S mindestens zwei nicht adjazente Knoten aus K enthalten

Färben von chordalen Graphen

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $k \geq 0$

Ein Knoten $u \in V$ vom Grad k heißt ***k-simplizial*** (oder einfach ***simplizial***), wenn alle Nachbarn von u paarweise adjazent sind

- Zusammenhängende chordale Graphen können als eine Verallgemeinerung von Bäumen aufgefasst werden
- Ein Graph ist ein Baum, wenn er aus K_1 durch sukzessives Hinzufügen von 1-simplizialen Knoten erzeugt werden kann
- Entsprechend heißt G ***k-Baum***, wenn G aus K_k durch sukz. Hinzufügen von k-simplizialen Knoten erzeugt werden kann

Färben von chordalen Graphen

- Wir werden sehen, dass ein zusammenhängender Graph genau dann chordal ist, wenn er aus K_1 durch sukzessives Hinzufügen von simplizialen Knoten erzeugt werden kann
- Äquivalent hierzu ist, dass G durch sukzessives Entfernen von simplizialen Knoten auf einen isolierten Knoten reduziert werden kann

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph

Eine lineare Ordnung $(u_1, \ldots, u_n)$ auf V heißt ***perfekte Eliminationsordnung (PEO)*** von G, wenn u_i für $i = 1, \ldots, n$ simplizial in $G[u_1, \ldots, u_i]$ ist

- Wir eliminieren die Knoten von G also in der Reihenfolge $u_n, \ldots, u_2, u_1$
- Es ist klar dass der K_n alle $n!$ lineare Ordnungen auf V als PEO hat
- Das folgende Lemma verallgemeinert die bekannte Tatsache, dass jeder nicht vollständige Baum T (also $T \notin \{K_1, K_2\}$) mindestens zwei nicht adjazente Blätter hat

Färben von chordalen Graphen

Lemma

Jeder nicht vollständige chordale Graph $G = (V, E)$ besitzt mindestens zwei simpliziale Knoten, die nicht adjazent sind

Beweis durch Induktion über die Knotenzahl n von G.

- Für $n \leq 2$ (IA) ist die Behauptung klar
- Für den IS sei $n(G) \geq 3$
- Da G nicht vollständig ist, enthält G zwei nichtadjazente Knoten x_1 und x_2
- Sei S ein minimaler x_1-x_2-Separator der Größe $k \geq 0$
- Im Fall $k > 0$ ist S nach obigem Lemma eine Clique in G
- Seien $G[V_1]$ und $G[V_2]$ die beiden Komponenten von $G - S$ mit $x_i \in V_i$
- Wir zeigen die Existenz zweier simplizialer Knoten $s_i \in V_i$, $i = 1, 2$

Färben von chordalen Graphen

Beweis (Fortsetzung)

- Betrachte die Teilgraphen $G_i = G[V_i \cup S]$
- Da G_i chordal ist und weniger als n Knoten hat, ist G_i nach IV entweder eine Clique oder G_i enthält mindestens zwei nicht adjazente simpliziale Knoten y_i, z_i
- Falls G_i eine Clique ist, ist $s_i = x_i$ simplizial in G_i, und da x_i keine Nachbarn außerhalb von $V_i \cup S$ hat, ist s_i dann auch simplizial in G
- Ist G_i keine Clique, kann höchstens einer der beiden Knoten y_i, z_i zu S gehören (da S im Fall $S \neq \emptyset$ eine Clique und $\{y_i, z_i\} \notin E$ ist)
- O.B.d.A. sei $y_i \in V_i$; dann hat $s_i = y_i$ keine Nachbarn außerhalb von $V_i \cup S$ und somit ist s_i auch simplizial in G

$\square$

Färben von chordalen Graphen

Satz

Ein Graph ist genau dann chordal, wenn er eine PEO hat

Beweis.

- Falls G chordal ist, lässt sich eine PEO gemäß obigem Lemma bestimmen, indem wir für $i = n, \ldots, 2$ sukzessive einen simplizialen Knoten u_i in $G - \{u_{i+1}, \ldots, u_n\}$ wählen
- Für die umgekehrte Richtung sei $(u_1, \ldots, u_n)$ eine PEO von G
- Wir zeigen induktiv, dass $G_i = G[u_1, \ldots, u_i]$ chordal ist
- Für $i \leq 3$ (IA) ist das klar
- Für den IS ($i \geq 4$) benutzen wir, dass u_i simplizial in G_i ist
- Daher enthält jeder Kreis K der Länge ≥ 4 in G_i, auf dem u_i liegt, eine Sehne zwischen den beiden Kreisnachbarn von u_i
- Also ist mit G_{i-1} auch G_i chordal $\square$

Färben von chordalen Graphen

Korollar

Es gibt einen Polynomialzeitalgorithmus A, der für einen gegebenen Graphen G eine PEO berechnet, falls G chordal ist, und andernfalls einen induzierten Kreis der Länge ≥ 4 ausgibt

Beweis.

- A versucht wie im Beweis von obigem Satz eine PEO zu bestimmen
- Stellt sich heraus, dass $G_i = G - \{u_{i+1}, \ldots, u_n\}$ keinen simplizialen Knoten u_i hat, so ist G_i nicht chordal
- Daher gibt es in G_i zwei nicht adjazente Knoten x und y, für die kein x-y-Separator eine Clique ist
- Berechnen wir für x und y einen beliebigen minimalen x-y-Separator S, so ist S keine Clique
- Wie im Beweis von 1 $\Rightarrow$ 2 können wir dann einen induzierten Kreis K der Länge ≥ 4 in G_i konstruieren
- Da G_i ein induzierter Teilgraph von G ist, ist K auch ein induzierter Kreis in G $\square$

Färben von chordalen Graphen

Algorithmus `chordal-color`(V, E)

berechne eine PEO $(u_1, \ldots, u_n)$ für $G = (V, E)$
starte `greedy-color` mit der Knotenfolge $(u_1, \ldots, u_n)$

Satz

Für einen gegebenen chordalen Graphen $G = (V, E)$ berechnet `chordal-color` eine k-Färbung c von G mit $k = \chi(G) = \omega(G)$

Beweis.

- Sei k die größte von `chordal-color` zugewiesene Farbe und sei u_i ein beliebiger Knoten mit $c(u_i) = k$
- Da $(u_1, \ldots, u_n)$ eine PEO von G ist, ist u_i simplizial in $G[u_1, \ldots, u_i]$
- Somit bilden die Nachbarn u_j von u_i mit $j < i$ eine Clique und wegen $c(u_i) = k$ bilden sie zusammen mit u_i eine k-Clique
- Daher gilt $\chi(G) \leq k \leq \omega(G)$, woraus wegen $\omega(G) \leq \chi(G)$ die Behauptung folgt □

Färben von chordalen Graphen

- Um `chordal-color` in Linearzeit zu implementieren, benötigen wir einen Linearzeit-Algorithmus zur Bestimmung einer PEO
- Rose, Tarjan und Lueker haben 1976 einen solchen Algorithmus angegeben, der auf lexikografischer Breitensuche (kurz LexBFS oder LBFS, engl. lexicographic breadth-first search) basiert
- Bevor wir diese Variante der Breitensuche vorstellen, gehen wir kurz auf verschiedene Ansätze zum Durchsuchen von Graphen ein
- Der folgende Algorithmus $\texttt{GraphSearch}(V, E)$ startet eine Suche in einem beliebigen Knoten u und findet zunächst alle von u aus erreichbaren Knoten
- Danach wird solange von einem noch nicht erreichten Knoten eine neue Suche gestartet, bis alle Knoten erreicht wurden
- Die Menge der aktuellen Knoten wird dabei in einer Datenstruktur A gespeichert
- Genauer enthält A alle bereits entdeckten Knoten, die noch nicht abgearbeitet sind

Algorithmus `GraphSearch`(V, E)

$R := \emptyset$ *// Menge der erreichten Knoten*
$L := ()$ *// Ausgabeliste*
repeat
    wähle $u \in V \setminus R$ *// u wurde neu entdeckt*
    $R := R \cup \{u\}$
    append(L, u)
    $\texttt{parent}(u) := \bot$
    $A := \{u\}$ *// Menge der aktuellen Knoten*
    while $A \neq \emptyset$ **do**
        wähle u aus A
        if $\exists v \in N(u) \setminus R$ **then**
            $A := A \cup \{v\}$; $R := R \cup \{v\}$ *// v wurde neu entdeckt*
            append(L, v)
            $\texttt{parent}(v) := u$
        else entferne u aus A *// u wurde abgearbeitet*
until $R = V$
return(L)

- Der Algorithmus `GraphSearch(`V, E`)` findet in jedem Durchlauf der repeat-Schleife eine neue Komponente des Eingabegraphen $G = (V, E)$
- Dies bedeutet, dass alle Knoten, die zu einer Komponente gehören, konsekutiv in der Ausgabeliste $L = (u_1, \ldots, u_n)$ auftreten, wobei abgesehen vom ersten Knoten jeder Komponente jeder Knoten u_k einen Nachbarn u_i mit $i < k$ hat
- Die folgende Definition fasst diese Eigenschaften der Ausgabeliste zusammen

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Eine lineare Ordnung $(u_1, \ldots, u_n)$ auf V heißt ***Suchordnung (SO)*** von G, wenn für jedes Tripel $j < k < l$ gilt:

$$u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i < k : i \neq j \wedge u_i \in N(u_k)$$

Färben von chordalen Graphen

Satz

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gibt der Algorithmus $\texttt{GraphSearch}(V, E)$ eine SO von G aus

Beweis.

- Ein Knoten u_k erhält nur dann den Wert $\texttt{parent}(u_k) = \bot$, wenn alle Knoten u_j mit $j < k$ bereits abgearbeitet sind und diese nur Nachbarn u_l mit $l < k$ hatten
- Falls also ein Vorgänger u_j von u_k mit einem Nachfolger u_l von u_k verbunden ist, liefert die parent-Funktion einen Nachbarn $u_i = \texttt{parent}(u_k)$ von u_k mit $i < k$
- Da $u_j \notin N(u_k)$ ist, gilt zusätzlich $i \neq j$ □

Färben von chordalen Graphen

- Die `parent`-Funktion liefert einen gerichteten Wald $W = (V, E_{\texttt{parent}})$, dessen Kantenmenge $E_{\texttt{parent}}$ aus allen Kanten der Form $(\texttt{parent}(v), v)$ mit $\texttt{parent}(v) \neq \perp$ besteht
- Die Kanten von W werden auch als ***Baumkanten*** (kurz ***B-Kanten***) und W wird auch als ***Suchwald*** von $G = (V, E)$ bezeichnet
- Für jeden Knoten $v \in V$ gibt es genau eine Wurzel w in W, von der aus v in W erreichbar ist
- Der eindeutig bestimmte w-v-Pfad $P = (u_0, \ldots, u_l)$ in W mit $u_0 = w$ und $u_l = v$ lässt sich ausgehend von $u_l = v$ unter Verwendung der `parent`-Funktion mittels $u_{i-1} = \texttt{parent}(u_i)$ für $i = l, \ldots, 1$ berechnen
- P wird auch als ***parent-Pfad*** von v bezeichnet
- Es ist klar, dass 2 Knoten v und v' genau dann in einer Komponente von G liegen, wenn sie die gleiche Wurzel haben

Färben von chordalen Graphen

- Realisieren wir die Menge A der aktuellen Knoten als einen Keller S, so erhalten wir eine Suchstrategie, die als ***Tiefensuche*** (kurz DFS, engl. depth first search) bezeichnet wird
- Die Benutzung eines Kellers bewirkt, dass nach der Entdeckung eines neuen Knotens v unter den Nachbarn des aktuellen Knotens u die Suche zuerst bei den Nachbarn von v fortgesetzt wird, bevor die anderen Nachbarn von u an die Reihe kommen

Algorithmus `GraphSearch`(V, E)

$R := \emptyset$ *// Menge der erreichten Knoten*
$L := ()$ *// Ausgabeliste*
repeat
    wähle $u \in V \setminus R$ *// u wurde neu entdeckt*
    $R := R \cup \{u\}$
    append(L, u)
    $\texttt{parent}(u) := \perp$
    $A := \{u\}$ *// Menge der aktuellen Knoten*
    while $A \neq \emptyset$ **do**
        wähle u aus A
        if $\exists v \in N(u) \setminus R$ **then**
            $A := A \cup \{v\}$; $R := R \cup \{v\}$ *// v wurde neu entdeckt*
            append(L, v)
            $\texttt{parent}(v) := u$
        else entferne u aus A *// u wurde abgearbeitet*
until $R = V$
return(L)

Algorithmus $\texttt{DFS}(V, E)$

$R := \emptyset$ // *Menge der erreichten Knoten*
$L := ()$ // *Ausgabeliste*
repeat
    wähle $u \in V \setminus R$ // *u wurde neu entdeckt*
    $R := R \cup \{u\}$
    append(L, u)
    $\texttt{parent}(u) := \perp$
    $S := (u)$ // *Keller der aktuellen Knoten*
    while $S \neq ()$ **do**
        $u := \text{top}(S)$
        if $\exists v \in N(u) \setminus R$ **then**
            push(S, v); $R := R \cup \{v\}$ // *v wurde neu entdeckt*
            append(L, v)
            $\texttt{parent}(v) := u$
        else pop(S) // *u wurde abgearbeitet*
until $R = V$
return(L)

Färben von chordalen Graphen

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Eine lineare Ordnung $(u_1, \ldots, u_n)$ auf V heißt ***Tiefensuchordnung*** (***DFS-Ordnung*** oder kurz ***DO***) von G, wenn für jedes Tripel $j < k < l$ gilt:

$$u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i : j < i < k \wedge u_i \in N(u_k)$$

Satz

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gibt der Algorithmus $\mathtt{DFS}(V, E)$ eine DO von G aus

Beweis.

Siehe Übungen $\square$

Färben von chordalen Graphen

- Realisieren wir die Menge der abzuarbeitenden Knoten als eine Warteschlange Q, so findet der resultierende Algorithmus $\mathtt{BFS}(V, E)$ einen kürzesten Weg vom Startknoten u zu allen von u aus erreichbaren Knoten
- Diese Suchstrategie wird als ***Breitensuche*** (kurz BFS, engl. breadth first search) bezeichnet
- Die Benutzung einer Warteschlange Q zur Speicherung der noch abzuarbeitenden Knoten bewirkt, dass alle Nachbarknoten v des aktuellen Knotens u vor den bisher noch nicht erreichten Nachbarn von v ausgegeben werden

Algorithmus BFS(V, E)

```
R := ∅      // Menge der erreichten Knoten
L := ()     // Ausgabeliste
repeat
   wähle u ∈ V\R      // u wurde neu entdeckt
   R := R ∪ {u}
   parent(u) := ⊥
   Q := (u)     // Warteschlange der aktuellen Knoten
   while Q ≠ () do
      u := dequeue(Q)     // u wird komplett abgearbeitet
      append(L, u)
      for all v ∈ N(u)\R do
         enqueue(Q, v)     // v wurde neu entdeckt
         parent(v) := u
      R := R ∪ N(u)
until R = V
return(L)
```

Färben von chordalen Graphen

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Eine lineare Ordnung $(u_1, \dots, u_n)$ auf V heißt ***Breitensuchordnung*** (***BFS-Ordnung*** oder kurz ***BO***) von G, wenn für jedes Tripel $j < k < l$ gilt:

$$u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i < j : u_i \in N(u_k)$$

Satz

$\texttt{BFS}(V, E)$ gibt für jeden Graphen $G = (V, E)$ eine BO von G aus

Beweis.

- Sei $u_j \in N(u_\ell) \setminus N(u_k)$ für ein Tripel $j < k < \ell$
- Da $\texttt{BFS}(V, E)$ eine SO von G ausgibt, wissen wir bereits, dass der Knoten $u_i = \texttt{parent}(u_k) \in N(u_k)$ einen Index $i < k$ hat
- Da u_k beim Abarbeiten von u_i und u_ℓ spätestens beim Abarbeiten von u_j zu Q hinzugefügt wird, muss u_i vor u_j abgearbeitet werden, da sonst u_ℓ vor u_k zu Q hinzugefügt würde $\square$

- BFS-Ordnungen lassen sich anschaulich anhand der Adjazenzmatrix charakterisieren
- Sei $(u_1, \ldots, u_n)$ eine BO für $G = (V, E)$ und sei $A = (a_{ij})$ die Adjazenzmatrix von G mit $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{u_i, u_j\} \in E$
- Weiter seien $z_i = a_{i1} \ldots a_{i,i-1}$ die Präfixe der Zeilen von A, die unterhalb der Diagonale verlaufen
- Sind nun die ersten j Einträge $a_{k1} \ldots a_{kj}$ einer Zeile s_k Null, so muss dies auch für jede Zeile s_ℓ mit $\ell > k$ gelten, da im Fall $a_{\ell j} = 1$ der Knoten $u_j \in N(u_\ell) \setminus N(u_k)$ wäre und somit ein $i < j$ mit $a_{ki} = 1$ existieren müsste
- Dies bedeutet, dass s_ℓ mindestens so viele Nullen als Präfix hat wie z_k
- Es ist aber möglich, dass z_k bspw. mit $00010\ldots$ beginnt und z_ℓ mit $00011\ldots$

Färben von chordalen Graphen

- Bei einer Breitensuche werden die noch nicht besuchten Nachbarn des aktuellen Knotens in beliebiger Reihenfolge zur Warteschlange hinzugefügt und auch wieder in dieser Reihenfolge entfernt
- Dagegen werden bei einer LexBFS die Knoten in der Warteschlange nachträglich umsortiert, falls dies notwendig ist, um eine LexBFS-Ordnung der Knoten zu erhalten
- Der Name von LexBFS rührt daher, dass die Knoten in einer Reihenfolge ausgegeben werden, die eine lexikalische Sortierung der Zeilenpräfixe z_i bewirkt
- Eine solche Sortierung kann auch bei einer gewöhnlichen Breitensuche auftreten, ist bei dieser aber nicht garantiert

Färben von chordalen Graphen

- Um einen Überblick über alle möglichen Fortsetzungen der aktuellen Liste L zu einer BO zu erhalten, bietet es sich an, Q als eine Warteschlange von Knotenmengen T_i zu realisieren (siehe Algorithmus $\mathtt{BFS}'$)
- Innerhalb jeder Menge T_i können die Knoten dann eine beliebige Reihenfolge annehmen
- Entsprechend liefert die Prozedur $\mathtt{Dequeue}(Q)$ ein beliebiges Element aus der ersten Menge in Q zurück und entfernt dieses aus Q

Algorithmus $\mathtt{BFS}'(V, E)$

$R := \emptyset$ *// Menge der erreichten Knoten*
$L := ()$ *// Ausgabeliste*
repeat
  wähle $u \in V \setminus R$; $R := R \cup \{u\}$
  $Q := (\{u\})$ *// Warteschlange von Knotenmengen*
  while $Q \neq ()$ **do**
    $u :=$ Dequeue(Q) *// u wird komplett abgearbeitet*
    append(L, u)
    if $N(u) \not\subseteq R$ **then** enqueue$(Q, N(u) \setminus R)$
    $R := R \cup N(u)$
until $R = V$
return(L)

Prozedur $\mathtt{Dequeue}(Q)$

entferne u aus first(Q)
if first$(Q) = \emptyset$ **then** dequeue(Q)
return(u)

Färben von chordalen Graphen

- Fassen wir die Menge $V \setminus R$ der noch nicht erreichten Knoten als Nachfolgerin der letzten Menge in Q auf, so trennt $\mathtt{BFS}'$ von dieser Restmenge in jedem Durchlauf der `while`-Schleife die Teilmenge $N(u) \setminus R$ ab und fügt sie Q im Fall $N(u) \setminus R \neq \emptyset$ hinzu
- Wie $\mathtt{BFS}'$ zerlegt auch `LexBFS` die Menge der noch nicht abgearbeiteten Knoten in eine Folge von Knotenmengen und speichert diese in Q
- Im Unterschied zu $\mathtt{BFS}'$ unterteilt `LexBFS` die Mengen in Q aber noch feiner und schränkt dadurch die möglichen Ausgabefolgen stärker ein
- Hierzu kann `LexBFS` im Gegensatz zu $\mathtt{BFS}'$ nicht nur die Restmenge $V \setminus R$, sondern beliebige Mengen in Q splitten

Färben von chordalen Graphen

Algorithmus `LexBFS`(V, E, u)

$L := ()$ *// Ausgabeliste*
$Q := (V)$ *// Warteschlange von Knotenmengen*
while $Q \neq ()$ **do**
  $u :=$ `Dequeue`(Q) *// u wird komplett abgearbeitet*
  append(L, u)
  `Splitqueue`$(Q, N(u))$
return(L)

Prozedur `Splitqueue`(Q, S)

for T in Q with $T \cap S \notin \{\emptyset, T\}$ **do**
  ersetze die Teilfolge (T) in Q durch $(T \cap S, T \setminus S)$

- Für eine effiziente Implementierung sollte die Schlange $Q = (T_1, \ldots, T_k)$ von Knotenmengen $T_i \subseteq V$ als doppelt verkettete Liste realisiert werden
- Zudem sollte die for-Schleife in der Prozedur `Splitqueue` durch eine Schleife über die Knoten v in der Adjazenzliste $S = N(u)$ ersetzt werden
- Weiterhin sollte für jeden Knoten v in der Adjazenzliste ein Zeiger auf die Menge T_i, die v enthält und auf seinen Eintrag in T_i gespeichert werden

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Eine lineare Ordnung $(u_1, \ldots, u_n)$ auf V heißt ***LexBFS-Ordnung (LBO)*** von G, wenn für jedes Tripel $j < k < l$ gilt:

$$u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i < j : u_i \in N(u_k) \setminus N(u_l)$$

- Ob eine Ordnung $(u_1, \ldots, u_n)$ eine LBO ist, lässt sich wie folgt an der gemäß $(u_1, \ldots, u_n)$ geordneten Adjazenzmatrix A ablesen:
  - die Zeilenpräfixe $z_1, \ldots, z_n$ unter der Diagonalen müssen im folgenden Sinne lexikalisch sortiert sein:
  - entweder ist z_i ein Präfix von z_{i+1} oder z_i hat an der ersten Position, wo sich die beiden Strings unterscheiden, eine Eins
- Bringen wir also die Zeilenpräfixe z_i durch Anhängen von Einsen auf die Länge n, so sind sie lexikografisch sortiert: $z_i 1^{n-i+1} \geq z_{i+1} 1^{n-i}$
- Man erhält sogar eine lexikografische Ordnung auf den kompletten Zeilen von A, falls man die Diagonale auf 1 setzt und die Knoten in jeder Menge T_i von Q nach absteigendem Knotengrad in G sortiert

Färben von chordalen Graphen

Satz

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gibt der Algorithmus $\texttt{LexBFS}(V, E)$ eine LBO $(u_1, \ldots, u_n)$ von G aus

Beweis.

- Sei $A = (a_{ij})$ die Adjazenzmatrix von G mit $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{u_i, u_j\} \in E$
- Wir zeigen, dass $(u_1, \ldots, u_n)$ eine LBO ist
- Existiert nämlich im Fall $k < \ell$ eine Position $j < k$ mit $a_{kj} = 0$ und $a_{\ell j} = 1$, so muss es eine Position $i < j$ mit $a_{ki} = 1$ und $a_{\ell i} = 0$ geben
- Ansonsten wäre der Knoten u_ℓ spätestens beim Abarbeiten von u_j in eine Menge vor dem Knoten u_k sortiert worden und könnte daher nicht nach dem Knoten u_k ausgegeben werden $\square$

Färben von chordalen Graphen

Satz

Jede LBO für einen chordalen Graphen G ist eine PEO für G

Beweis.

- Sei $(u_1, \ldots, u_n)$ eine LBO für $G = (V, E)$ und sei $A = (a_{ij})$ die Adjazenzmatrix von G mit $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{u_i, u_j\} \in E$, wobei wir für a_{ij} auch $A[i, j]$ schreiben
- Wir zeigen, dass G nicht chordal
  ist, wenn u_i nicht simplizial
  in $G_i = G[u_1, \ldots, u_i]$ ist
- Falls u_i nicht simplizial in G_i ist, müssen Indizes $i_2 < i_1 < i =: i_0$ mit $A[i_0, i_1] = A[i_0, i_2] = 1$ und $A[i_1, i_2] = 0$ existieren
- Wegen $A[i_1, i_2] = 0$ und $A[i_0, i_2] = 1$ muss es einen Index $i_3 < i_2$ geben mit $A[i_1, i_3] = 1$ und $A[i_0, i_3] = 0$, wobei wir i_3 möglichst klein wählen
- Falls nun $A[i_2, i_3] = 1$ ist, haben wir einen induzierten Kreis $G[u_{i_0}, u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}] = (u_{i_0}, u_{i_1}, u_{i_3}, u_{i_2})$ der Länge 4 in G gefunden

Beweis (Fortsetzung)

- Andernfalls muss es wegen $A[i_2, i_3] = 0$ und $A[i_1, i_3] = 1$ ein $i_4 < i_3$ mit $A[i_2, i_4] = 1$ und $A[i_1, i_4] = 0$ geben, wobei wir i_4 wieder minimal wählen
- Spätestens für $i_k = 1$ muss $A[i_{k-1}, i_k] = 1$ sein, da es kein $i_{k+1} < i_k$ gibt
- Somit erhalten wir eine Indexfolge $i_0 > i_1 > \cdots > i_k \geq 1$ mit
  1. $A[i_0, i_1] = A[i_j, i_{j+2}] = A[i_{k-1}, i_k] = 1$ für $j = 0, \ldots, k-2$
  2. $A[i_0, i_3] = A[i_j, i_{j+1}] = A[i_j, i_{j+3}] = A[i_{k-2}, i_{k-1}] = 0$, $1 \leq j \leq k-3$
  3. $A[i_j, \ell] = A[i_{j+1}, \ell]$ für $0 \leq j \leq k-4$ und $1 \leq \ell < i_{j+3}$

Färben von chordalen Graphen

Beweis. (Schluss)

- Die Eigenschaften ❶ und ❷ ergeben sich direkt aus der Konstruktion der Folge $u_{i_0}, u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}$
- Eigenschaft ❸ folgt aus der minimalen Wahl der Indizes $i_3, \ldots, i_k$ und impliziert für $r = 4, \ldots, k$ die Gleichungen

  $$A[i_0, i_r] = A[i_1, i_r] = \cdots = A[i_{r-3}, i_r],$$

  indem wir $j = 0, \ldots, r-4$ und $\ell = i_r$ setzen
- Da zudem $A[i_{r-3}, i_r]$ gemäß Eigenschaft ❷ für $r = 3, \ldots, k$ den Wert 0 hat, folgt für alle Paare $0 \leq r < s \leq k$ die Äquivalenz

  $$A[i_r, i_s] = 1 \Leftrightarrow s = r + 2 \text{ oder } s = r + 1 \wedge r \in \{0, k-1\}$$
- Folglich ist $G[u_{i_0}, \ldots, u_{i_k}]$ ein Kreis der Länge $k + 1 \geq 4$ □

Färben von chordalen Graphen

- Damit haben wir einen Linearzeitalgorithmus, der für chordale Graphen eine PEO berechnet
- Da auch `greedy-color` linear zeitbeschränkt ist, können wir den Algorithmus `chordal-color` in Linearzeit implementieren
- Diesen Algorithmus können wir noch so modifizieren, dass er zusammen mit der gefundenen k-Färbung
  - entweder eine Clique C der Größe k (als Zertifikat, dass $\chi(G) = k = \omega(G)$ ist)
  - oder einen induzierten Kreis der Länge ≥ 4 ausgibt (als Zertifikat, dass G nicht chordal ist)

Der Satz von Brooks

Satz (Brooks 1941)

Für einen zusammenhängenden Graphen G gilt $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ genau dann, wenn $G = K_n$ für ein $n \geq 1$ oder $G = C_n$ für ein ungerades $n \geq 3$ ist

Beweis.

- Es ist klar, dass die Graphen $G = K_n$ für $n \geq 1$ und $G = C_n$ für ungerades $n \geq 3$ die chromatische Zahl $\Delta(G) + 1$ haben
- Um zu zeigen, dass dies die einzigen zusammenhängenden Graphen mit $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ sind, betrachten wir verschiedene Fälle
- Falls G nicht regulär ist, können wir ausgehend von einem Knoten u_1 vom Grad $\deg_G(u_1) < \Delta(G)$ eine Suchordnung $(u_1, \ldots, u_n)$ berechnen und G greedy in der umgekehrten Reihenfolge $(u_n, \ldots, u_1)$ $\Delta(G)$-färben
- Dies ist möglich, da jeder Knoten u_i mit $i \geq 2$ zum Zeitpunkt der Berechnung von $c(u_i)$ noch einen ungefärbten Nachbar $\texttt{parent}(u_i)$ und u_1 einen Grad $\deg_G(u_1) < \Delta(G)$ hat

Beweis des Satzes von Brooks (Fortsetzung)

- Falls G regulär, aber nicht 2-zusammenhängend ist, berechnen wir $\Delta(G)$-Färbungen c_i für die einzelnen Blöcke B_i von G
- Dies ist möglich, da jeder Block B_i mindestens einen Schnittknoten enthält und daher höchstens für ein $k < \Delta(G)$ k-regulär ist
- Die Färbungen c_i lassen sich ausgehend von einem beliebigen Wurzelblock des BC-Baums hin zu den Blattblöcken in eine $\Delta(G)$-Färbung c für G transformieren
- Hierzu müssen wir lediglich die Farben im aktuellen Block B_i so umbenennen, dass der Schnittknoten, der B_i mit seinem Elternblock verbindet, die vorgegebene Farbe erhält
- Es bleibt also der Fall, dass G d-regulär und $\kappa(G) \geq 2$ ist
- Für diesen Fall benutzen wir folgende Behauptung