Graphalgorithmen

Johannes Köbler

Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

SS 2021

Organisatorisches

Aktuelle Infos auf der VL-Webseite unter

- ***https://hu.berlin/graphalgo***

bzw.

- ***https://www.informatik.hu-berlin.de/de/forschung/gebiete/algorithmenII/Lehre/ss21/graphalgo***

Ablauf

Skript, Folien und Aufgabenblätter

- Skript, Folien und Aufzeichnung werden jeweils nach der Vorlesung ins Netz (Webseite bzw. Moodle) gestellt
- Übungsblätter werden in der Regel donnerstags veröffentlicht
- Die Besprechung der mündlichen Aufgaben erfolgt am Donnerstag der Folgewoche
- Lösungen dazu können bis zum Tag davor in Moodle hochgeladen werden, Details siehe dort
- Die schriftlichen Aufgaben sind bis Donnerstag zwei Wochen nach Ausgabe um 13:00 Uhr abzugeben
- Fragen zu Übung und Vorlesung können im Moodle-Forum auch asynchron gestellt und diskutiert werden

Übungen

Anmeldung

- über Agnes
- und bei Moodle (wegen Punktevergabe und Bildung von Abgabegruppen)
- Mails von Agnes und von Moodle werden standardmäßig an den HU-Account gesendet (bitte regelmäßig checken)

Ausgabe der Aufgabenblätter

- über Moodle und auf der VL-Webseite

Abgabe von Lösungen

- digital über Moodle

Bearbeitung der Übungsaufgaben

- in Gruppen von bis zu drei Teilnehmern
- Lösungen für die schriftlichen Aufgaben sollten als PDF abgegeben werden
- die Abgabe von Lösungsvorschlägen für die mündlichen Aufgaben ist freiwillig und geht nicht in die Punktewertung ein
- Lösungsvorschläge für die mündlichen Aufgaben können auch per Texteingabe gemacht werden
- besonders gut gelungene Lösungen werden mit Zustimmung der/des Abgebenden im Forum veröffentlicht

Übungsschein und Prüfung

Scheinkriterien

- Lösen von mindestens 50% der schriftlichen Aufgaben

Prüfungsform

- voraussichtlich mündlich
- Der Übungsschein ist ***nicht*** Prüfungsvoraussetzung

Gibt es zum organisatorischen Ablauf noch Fragen?

Einführung

- Viele praktisch relevante Problemstellungen lassen sich durch graphentheoretische Probleme modellieren, wie zum Beispiel
  - Finden kürzester Wege zwischen Städten
  - Berechnung von Flüssen und Schnitten in Netzwerken
  - Zuordungsprobleme (Berechnung von Matchings)
  - Färbungsprobleme (Knoten- und Kantenfärbungen)
  - planare Einbettungen von Schaltkreisen usw.
- in der Graphentheorie werden kombinatorische Eigenschaften von Graphen erforscht
- in diesem Modul steht der Entwurf von effizienten Algorithmen auf Graphen im Mittelpunkt

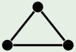
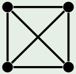
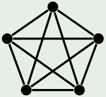
Graphentheoretische Grundlagen

Definition

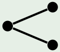
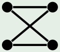
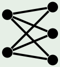
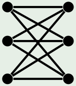
- Ein ***(ungerichteter) Graph*** ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei
  V - eine endliche Menge von Knoten/Ecken und
  E - die Menge der Kanten ist
- Hierbei gilt $E \subseteq \binom{V}{2} := \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$
- Die ***Nachbarschaft*** von $v \in V$ ist $N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$
- Der ***Grad*** von v ist $\deg_G(v) = \|N_G(v)\|$
- Der ***Minimalgrad*** von G ist $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg_G(v)$ und der ***Maximalgrad*** von G ist $\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg_G(v)$
- Im Fall $\delta(G) = \Delta(G) = k$ heißt G ***k-regulär***
- Jeder Knoten $u \in V$ vom Grad ≤ 1 heißt ***Blatt*** und die übrigen Knoten (vom Grad ≥ 2) heißen ***innere Knoten*** von G
- Falls G aus dem Kontext ersichtlich ist, lassen wir den Index G weg und schreiben auch einfach $N(v)$, $\deg(v)$, δ usw.

Beispiel

- Der ***vollständige Graph*** (V, E) auf n Knoten, d.h. $\|V\| = n$ und $E = \binom{V}{2}$, wird mit K_n und der ***leere Graph*** $(V, \emptyset)$ auf n Knoten wird mit E_n bezeichnet:

K_1  K_2  K_3  K_4  K_5 

- Der ***vollständige bipartite Graph*** (A, B, E) auf $a + b$ Knoten, d.h. $A \cap B = \emptyset$, $\|A\| = a$, $\|B\| = b$ und $E = \{\{u, v\} \mid u \in A, v \in B\}$ wird mit $K_{a,b}$ bezeichnet:

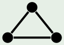
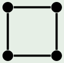
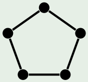
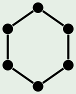
$K_{1,1}$  $K_{1,2}$  $K_{2,2}$  $K_{2,3}$  $K_{3,3}$ 

Beispiel (Fortsetzung)

- Der ***Pfad*** mit n Knoten wird mit P_n bezeichnet:

P_2  P_3  P_4  P_5 

- Der ***Kreis*** mit n Knoten wird mit C_n bezeichnet:

C_3  C_4  C_5  C_6 

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ heißt ***unabhängig*** oder ***stabil***, wenn es keine Kante von G mit beiden Endpunkten in U gibt, d.h. es gilt $E \cap \binom{U}{2} = \emptyset$
- Die ***Stabilitätszahl*** ist

$$\alpha(G) = \max\{\|U\| \mid U \text{ ist stabile Menge in } G\}$$

- Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ heißt ***Clique***, wenn jede Kante mit beiden Endpunkten in U in E ist, d.h. es gilt $\binom{U}{2} \subseteq E$
- Die ***Cliquenzahl*** ist

$$\omega(G) = \max\{\|U\| \mid U \text{ ist Clique in } G\}$$

Definition. (Fortsetzung)

- Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt ***Sub-/Teil-/Untergraph*** von $G = (V, E)$, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ ist
- Im Fall $V' = V$ wird G' auch ein ***(auf)spannender*** Teilgraph von G genannt und wir schreiben für G' auch $G - E''$ (bzw. $G = G' \cup E''$), wobei $E'' = E - E'$ die Menge der aus G entfernten Kanten ist
- Im Fall $E'' = \{e\}$ schreiben wir für G' auch einfach $G - e$ (bzw. $G = G' \cup e$)
- Ein k-regulärer spannender Teilgraph von G wird auch als ***k-Faktor*** von G bezeichnet
- Ein d-regulärer Graph G heißt ***k-faktorisierbar***, wenn sich G in $\ell = d/k$ kantendisjunkte k-Faktoren $G_1, \ldots, G_\ell$ zerlegen lässt

Definition. (Fortsetzung)

- Ein Subgraph $G' = (V', E')$ von $G = (V, E)$ heißt (***durch*** V') ***induziert***, falls $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ ist
- Für G' schreiben wir dann auch $G[V']$ oder $G - V''$, wobei $V'' = V - V'$ die Menge der aus G entfernten Knoten ist
- Ist $V'' = \{v\}$, so schreiben wir für G' auch einfach $G - v$ und im Fall $V' = \{v_1, \ldots, v_k\}$ auch $G[v_1, \ldots, v_k]$
- Ein ***Weg*** ist eine Folge von (nicht notwendig verschiedenen) Knoten $v_0, \ldots, v_\ell$ mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $i = 0, \ldots, \ell - 1$
- Die ***Länge*** des Weges ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten, also ℓ
- Im Fall $\ell = 0$ heißt der Weg ***trivial***
- Ein Weg $(v_0, \ldots, v_\ell)$ heißt auch v_0-v_ℓ-***Weg***

Definition. (Fortsetzung)

- G heißt ***zusammenhängend***, falls es für alle Paare $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ einen u-v-Weg gibt
- Die durch die Äquivalenzklassen $V_i \subseteq V$ der Relation

$$Z = \{(u, v) \in V \times V \mid \text{ es gibt in } G \text{ einen } u\text{-}v\text{-Weg}\}$$

  induzierten Teilgraphen $G[V_i]$ heißen ***Zusammenhangskomponenten*** (engl. connected components) oder einfach ***Komponenten*** von G
- Ein u-v-Weg heißt ***einfach*** oder ***u-v-Pfad***, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.
- Ein ***Zyklus*** ist ein u-v-Weg mit $u = v$

Definition. (Schluss)

- Eine Menge von Pfaden heißt
  - ***disjunkt***, wenn je zwei Pfade in der Menge keine gemeinsamen Knoten haben,
  - ***kantendisjunkt***, wenn je zwei Pfade in der Menge keine gemeinsamen Kanten haben, und
  - ***knotendisjunkt***, wenn je zwei Pfade in der Menge höchstens gemeinsame Endpunkte haben
- Ein ***Kreis*** ist ein Zyklus $(v_1 \ldots, v_\ell, v_1)$ der Länge $\ell \geq 3$, für den $v_1, \ldots, v_\ell$ paarweise verschieden sind
- Ein Graph heißt ***kreisfrei***, ***azyklisch*** oder ***Wald***, falls er keinen Kreis enthält
- Ein ***Baum*** ist ein zusammenhängender Wald

Definition

- Ein ***gerichteter Graph*** oder ***Digraph*** ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei
  V - eine endliche Menge von ***Knoten/Ecken*** und
  E - die Menge der ***Kanten*** ist
- Hierbei gilt $E \subseteq V \times V = \{(u, v) \mid u, v \in V\}$
- Kanten der Form (u, u) heißen ***Schlingen***
- Die ***Nachfolgermenge*** von $v \in V$ ist $N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$
- Die ***Vorgängermenge*** von v ist $N^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$
- Die ***Nachbarmenge*** von v ist $N(v) = N^+(v) \cup N^-(v)$
- Der ***Ausgangsgrad*** von v ist $\deg^+(v) = \|N^+(v)\|$ und der ***Eingangsgrad*** von v ist $\deg^-(v) = \|N^-(v)\|$
- Der ***Grad*** von v ist $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$
- Ein Knoten $w \in V$ vom Eingangsgrad $\deg^-(w) = 0$ heißt ***Wurzel*** von G, und ein Knoten $u \in V$ vom Ausgangsgrad $\deg^+(u) = 0$ heißt ***Blatt***

Definition. (Fortsetzung)

- Ein ***(gerichteter) v_0-v_ℓ-Weg*** in G ist eine Folge von Knoten $v_0, \dots, v_\ell$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \dots, \ell - 1$
- Ein ***(gerichteter) Zyklus*** ist ein gerichteter u-v-Weg mit $u = v$
- Ein gerichteter Weg heißt ***einfach*** oder ***(gerichteter) Pfad***, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind
- Ein ***(gerichteter) Kreis*** in G ist ein gerichteter Zyklus $(v_1 \dots, v_\ell, v_1)$ der Länge $\ell \geq 1$, für den $v_1, \dots, v_\ell$ paarweise verschieden sind
- G heißt ***kreisfrei*** oder ***azyklisch***, wenn G keinen gerichteten Kreis hat
- G heißt ***gerichteter Wald***, wenn G kreisfrei ist und jeder Knoten $v \in V$ Eingangsgrad $\deg^-(v) \leq 1$ hat
- G heißt ***zusammenhängend***, wenn es in G für jedes Knotenpaar $u \neq v \in V$ einen u-v-Pfad oder einen v-u-Pfad gibt
- G heißt ***stark zusammenhängend***, wenn es in G für jedes Knotenpaar $u \neq v \in V$ sowohl einen u-v-Pfad als auch einen v-u-Pfad gibt

Datenstrukturen für Graphen

Definition

- Die ***Adjazenzmatrix*** eines Graphen bzw. Digraphen $G = (V, E)$ mit (geordneter) Knotenmenge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist die $(n \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})$ mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenzmatrix symmetrisch mit $a_{ii} = 0$ für $i = 1, \ldots, n$

Datenstrukturen für Graphen

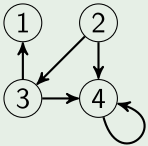
Definition. (Fortsetzung)

- Bei der ***Adjazenzlisten-Darstellung*** wird für jeden Knoten v_i eine Liste mit seinen Nachbarn verwaltet
- Im gerichteten Fall verwaltet man entweder nur die Liste der Nachfolger oder zusätzlich eine weitere für die Vorgänger
- Falls die Anzahl der Knoten statisch ist, organisiert man die Adjazenzlisten in einem Feld, d.h. das Feldelement mit Index i verweist auf die Adjazenzliste von Knoten v_i
- Falls sich die Anzahl der Knoten dynamisch ändert, so werden die Adjazenzlisten typischerweise ebenfalls in einer doppelt verketteten Liste verwaltet

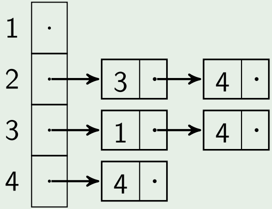
Datenstrukturen für Graphen

Beispiel

Betrachte den gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4\}$ und $E = \{(2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 4)\}$. Dieser hat folgende Adjazenzmatrix- und Adjazenzlisten-Darstellung:



	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	1
4	0	0	0	1



Färben von Graphen

Definition

- Eine Abbildung $f\colon\ V \to \mathbb{N}$ heißt ***Färbung*** von G, wenn $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$ gilt
- G heißt ***k-färbbar***, falls eine Färbung $f\colon\ V \to \{1, \ldots, k\}$ existiert
- Die ***chromatische Zahl*** ist

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}$$

Beispiel

$$\chi(E_n) = 1,\ \chi(K_{n,m}) = 2,\ \chi(K_n) = n,$$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade} \\ 3, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Färben von Graphen

- Ein wichtiges Entscheidungsproblem ist, ob ein gegebener Graph k-färbbar ist
- Dieses Problem ist für jedes feste $k \geq 3$ schwierig

k-Färbbarkeit (k-COLORING):

Gegeben: Ein Graph G

Gefragt: Ist G k-färbbar?

Satz

k-COLORING ist für $k \geq 3$ NP-vollständig.

Färben von Graphen

Das folgende Lemma setzt die chromatische Zahl $\chi(G)$ in Beziehung zur Stabilitätszahl $\alpha(G)$

Lemma

$n/\alpha(G) \le \chi(G) \le n - \alpha(G) + 1.$

Beweis.

- Sei G ein Graph und sei c eine $\chi(G)$-Färbung von G
- Da dann die Mengen $S_i = \{u \in V \mid c(u) = i\}$, $i = 1, \ldots, \chi(G)$, stabil sind, folgt $\|S_i\| \le \alpha(G)$
- Somit gilt

$$n = \sum_{i=1}^{\chi(G)} \|S_i\| \le \chi(G)\alpha(G)$$

Lemma

$n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1.$

Beweis (Fortsetzung).

- Für den Beweis von $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$ sei S eine stabile Menge in G mit $\|S\| = \alpha(G)$
- Dann ist $G - S$ k-färbbar für ein $k \leq n - \|S\|$
- Da wir alle Knoten in S mit der Farbe $k + 1$ färben können, folgt $\chi(G) \leq k + 1 \leq n - \alpha(G) + 1$ □

Beide Abschätzungen sind scharf, können andererseits aber auch beliebig schlecht werden

Färben von Graphen

Lemma

$\binom{\chi(G)}{2} \leq m$ und somit $\chi(G) \leq 1/2 + \sqrt{2m + 1/4}$

Beweis.

Zwischen je zwei Farbklassen einer optimalen Färbung muss es mindestens eine Kante geben $\square$

Die chromatische Zahl steht auch in Beziehung zur Cliquenzahl $\omega(G)$ und zum Maximalgrad $\Delta(G)$

Lemma

$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Färben von Graphen

Lemma

$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Beweis.

- Die erste Ungleichung folgt, da die Knoten einer größten Clique unterschiedliche Farben erhalten müssen
- Um die zweite Ungleichung zu erhalten, betrachten wir den

Algorithmus `greedy-color`

```
1  input ein Graph G = (V, E) mit V = {v_1, ..., v_n}
2  c(v_1) := 1
3  for i := 2 to n do
4     F_i := {c(v_j) | j < i, v_j ∈ N(v_i)}
5     c(v_i) := min{k ≥ 1 | k ∉ F_i}
```

- Da in Zeile 5 für die Farbe $c(v_i)$ von v_i nur $\|F_i\| \leq \Delta(G)$ Farben verboten sind, gilt $c(v_i) \leq \Delta(G) + 1$ □

Färben von planaren Graphen

- Ein Graph G heißt ***planar***, wenn er so in die Ebene einbettbar ist, dass sich zwei verschiedene Kanten höchstens in ihren Endpunkten berühren
- Dabei werden die Knoten von G als Punkte und die Kanten von G als Verbindungslinien (genauer: Jordankurven) zwischen den zugehörigen Endpunkten dargestellt
- Bereits im 19. Jahrhundert wurde die Frage aufgeworfen, wie viele Farben höchstens benötigt werden, um eine Landkarte so zu färben, dass aneinander grenzende Länder unterschiedliche Farben erhalten
- Offensichtlich lässt sich eine Landkarte in einen planaren Graphen transformieren, indem man für jedes Land einen Knoten zeichnet und benachbarte Länder durch eine Kante verbindet
- Länder, die sich nur in einem Punkt berühren, gelten dabei nicht als benachbart

Färben von planaren Graphen

- Die Vermutung, dass 4 Farben ausreichen, wurde 1878 von Kempe „bewiesen“ und erst 1890 entdeckte Heawood einen Fehler in Kempes „Beweis“
- Übrig blieb der 5-Farben-Satz
- Der 4-Farben-Satz wurde erst 1976 von Appel und Haken bewiesen
- Hierbei handelt es sich jedoch nicht um einen Beweis im klassischen Sinne, da zur Überprüfung der vielen auftretenden Spezialfälle Computer benötigt werden

Satz (Appel, Haken 1976)

Jeder planare Graph ist 4-färbbar

Färben von planaren Graphen

Satz (Appel, Haken 1976)

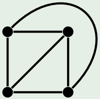
Jeder planare Graph ist 4-färbbar

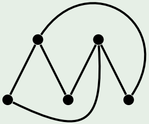
- Aus dem Beweis des 4-Farben-Satzes von Appel und Haken lässt sich ein 4-Färbungsalgorithmus für planare Graphen mit einer Laufzeit von $\mathcal{O}(n^4)$ gewinnen
- Im Jahr 1997 fanden Robertson, Sanders, Seymour und Thomas einen einfacheren Beweis für den 4-Farben-Satz, welcher zwar einen deutlich schnelleren $\mathcal{O}(n^2)$ Algorithmus liefert, aber ebenfalls nur mit Computer-Unterstützung verifizierbar ist

Färben von planaren Graphen

Beispiel

Wie die folgenden Einbettungen von K_4 und $K_{2,3}$ in die Ebene zeigen, sind diese Graphen planar

K_4 : 

$K_{2,3}$: 

◁

- Zur Beantwortung der Frage, ob auch K_5 und $K_{3,3}$ planar sind, betrachten wir die ***Gebiete***, die bei der Einbettung von (zusammenhängenden) Graphen in die Ebene entstehen
- Dabei gehören 2 Punkte zum selben Gebiet, falls es zwischen ihnen eine Verbindungslinie gibt, die keine Kante des eingebetten Graphen kreuzt oder berührt
- Nur eines dieser Gebiete ist unbeschränkt und dieses wird als ***äußeres Gebiet*** bezeichnet

Färben von planaren Graphen

- Die Anzahl der Gebiete von G bezeichnen wir mit $r(G)$ oder kurz mit r
- Die begrenzenden Kanten eines Gebietes g bilden den Rand von g
- Ihre Anzahl dieser Kanten bezeichnen wir mit $d(g)$, wobei Kanten, an die g von beiden Seiten grenzt, doppelt gezählt werden
- Der ***Rand*** *rand*(g) eines Gebiets g ist die (zirkuläre) Folge aller an g grenzenden Kanten, wobei jede Kante so durchlaufen wird, dass g „in Fahrtrichtung links“ liegt
- Dies hat zur Folge, dass jeder Knoten u, der über eine Kante e erreicht wird, über die im Uhrzeigersinn nächste Kante e' wieder verlassen wird
- Auf diese Weise erhalten wir für jeden Knoten u eine (zirkuläre) Ordnung π_u aller mit u inzidenten Kanten
- Wir nennen das Tripel $G' = (V, E, R)$ eine ***ebene Realisierung*** des Graphen $G = (V, E)$, falls es eine Einbettung von G in die Ebene gibt, deren Gebiete die Ränder in R haben
- In diesem Fall nennen wir $G' = (V, E, R)$ auch einen ***ebenen Graphen***

Färben von planaren Graphen

- Führen zwei Einbettungen von G in die Ebene auf dieselbe Randmenge R, so werden sie als ***äquivalent*** angesehen
- Eine andere Möglichkeit, Einbettungen bis auf Äquivalenz kombinatorisch zu beschreiben, besteht darin, für jeden Knoten u die (zirkuläre) Ordnung π_u aller mit u inzidenten Kanten anzugeben
- Man nennt $\pi = \{\pi_u \mid u \in V\}$ ein ***Rotationssystem*** für G, falls es eine entsprechende Einbettung gibt
- Rotationssysteme haben den Vorteil, dass sie in Adjazenzlisten-darstellung ohne zusätzlichen Platzaufwand gespeichert werden können, indem man die zu u adjazenten Knoten gemäß π_u anordnet
- Ist G nicht zusammenhängend, so betten wir die Komponenten von G in die Ebene ein und fassen alle Ränder, die bei diesen Einbettungen entstehen, zu einer Randmenge R zusammen
- Da jede Kante zur Gesamtlänge $\sum_g d(g)$ aller Ränder den Wert 2 beiträgt (sie wird genau einmal in jeder Richtung durchlaufen), folgt

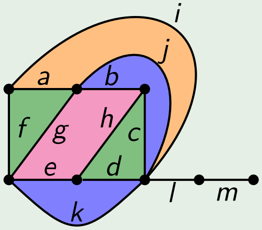
$$\sum_g d(g) = 2m(G)$$

Färben von planaren Graphen

Beispiel

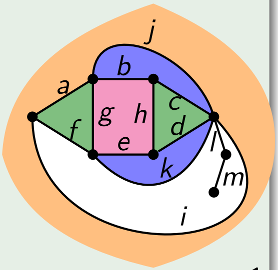
- Die nebenstehenden Einbettungen von $G = (V, E)$ in die Ebene haben 7 Gebiete mit den Rändern

$$R = \{(a, f, g), (a, j, i), (b, g, e, h), (b, c, j), (c, h, d), (d, e, k), (f, i, l, m, m, l, k)\}$$



- Der zugehörige ebene Graph ist $G' = (V, E, R)$ und das zugehörige Rotationssystem ist

$$\pi = \{(a, f, i), (a, j, b, g), (b, c, h), (e, k, f, g), (d, e, h), (c, j, i, l, k, d), (l, m), (m)\}$$



- Man beachte, dass sowohl in R als auch in π jede Kante genau zweimal vorkommt
- Anstelle von (zirkulären) Kantenfolgen kann man die Elemente von R und π natürlich auch durch entsprechende Knotenfolgen beschreiben

◁

Färben von planaren Graphen

Satz (Polyederformel von Euler, 1750)

Für einen zusammenhängenden ebenen Graphen $G = (V, E, R)$ gilt

$$n(G) - m(G) + r(G) = 2 \qquad (*)$$

Beweis durch Induktion über die Kantenzahl $m(G) = m$.

$m = 0$: Da G zusammenhängend ist, muss dann $n = 1$ sein. Somit ist auch $r = 1$, also $(*)$ erfüllt.

$m - 1 \rightsquigarrow m$: Sei G ein zusammenhängender ebener Graph mit m Kanten

- Ist G ein Baum, so entfernen wir ein Blatt und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen G' mit $n' = n - 1$ Knoten, $m' = m - 1$ Kanten und $r' = r$ Gebieten
- Nach IV folgt $n - m + r = (n - 1) - (m - 1) + r = n' - m' + r' = 2$
- Falls G kein Baum ist, entfernen wir eine Kante auf einem Kreis in G und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen G' mit $n' = n$ Knoten, $m' = m - 1$ Kanten und $r' = r - 1$ Gebieten
- Nach IV folgt $n - m + r = n - (m - 1) + (r - 1) = n' - m' + r' = 2$

Färben von planaren Graphen

Korollar. Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten

Dann ist $m \leq 3n - 6$. Falls G dreiecksfrei ist, gilt sogar $m \leq 2n - 4$.

Beweis.

- O.B.d.A. sei G zusammenhängend
- Wir betrachten eine beliebige planare Einbettung von G
- Da $n \geq 3$ ist, ist jedes Gebiet g von $d(g) \geq 3$ Kanten umgeben
- Daher ist $2m = i = \sum_g d(g) \geq 3r$ bzw. $r \leq 2m/3$
- Eulers Formel liefert
  $$m = n + r - 2 \leq n + 2m/3 - 2,$$
  was $(1 - {}^2\!/_3)m \leq n - 2$ und somit $m \leq 3n - 6$ impliziert
- Wenn G dreiecksfrei ist, ist jedes Gebiet von $d(g) \geq 4$ Kanten umgeben
- Daher ist $2m = i = \sum_g d(g) \geq 4r$ bzw. $r \leq m/2$
- Eulers Formel liefert daher $m = n + r - 2 \leq n + m/2 - 2$, was $m/2 \leq n - 2$ und somit $m \leq 2n - 4$ impliziert

$\square$

Korollar

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar

Beweis.

- Wegen $n(K_5) = 5$, also $3n(K_5) - 6 = 9$, und wegen $m(K_5) = \binom{5}{2} = 10$ gilt $m(K_5) \not\leq 3n(K_5) - 6$
- Wegen $n(K_{3,3}) = 6$, also $2n(K_{3,3}) - 4 = 8$, und wegen $m(K_{3,3}) = 3 \cdot 3 = 9$ gilt $m(K_{3,3}) \not\leq 2n(K_{3,3}) - 4$ $\square$

Färben von planaren Graphen

Als weitere interessante Folgerung aus der Polyederformel können wir zeigen, dass jeder planare Graph einen Knoten v vom Grad $\deg(v) \leq 5$ hat

Korollar

Jeder planare Graph hat einen Minimalgrad $\delta \leq 5$

Beweis.

- Für $n \leq 6$ ist die Behauptung klar
- Für $n > 6$ impliziert die Annahme $\delta \geq 6$ die Ungleichung

$$m = \frac{1}{2}\sum_{u \in V} \deg(u) \geq \frac{1}{2}\sum_{u \in V} 6 = 3n,$$

was im Widerspruch zu $m \leq 3n - 6$ steht $\square$

Färben von planaren Graphen

Definition. Seien $G = (V, E)$ und H Graphen und seien $u, v \in V$

- Durch ***Fusion*** von u und v entsteht aus G der Graph $G_{uv} = (V - \{v\}, E')$ mit
$$E' = \{e \in E \mid v \notin e\} \cup \{\{u, v'\} \mid \{v, v'\} \in E - \{u, v\}\}$$
- Ist $e = \{u, v\}$ eine Kante von G (also $e \in E$), so sagen wir auch, G_{uv} entsteht aus G durch ***Kontraktion*** der Kante e
- Hat zudem v den Grad 2 mit $N_G(v) = \{u, w\}$, so sagen wir auch, G_{uv} entsteht aus G durch ***Überbrückung*** des Knotens v bzw. G aus G_{uv} durch ***Unterteilung*** der Kante $\{u, w\}$

Definition. (Fortsetzung)

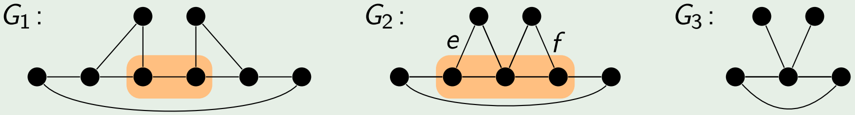
- G heißt zu H ***kontrahierbar***, falls H aus einer isomorphen Kopie von G durch wiederholte Kontraktionen gewonnen werden kann
- In diesem Fall nennen wir H auch eine ***Kontraktion*** von G bzw. G eine ***Expansion*** von H
- H heißt zu G ***unterteilbar***, falls G aus einer isomorphen Kopie von H durch wiederholte Unterteilungen von Kanten gewonnen werden kann
- In diesem Fall nennen wir G auch eine ***Unterteilung*** von H bzw. H eine ***Überbrückung*** von G

Definition. (Schluss)

- H heißt ***Minor*** von G, wenn ein Teilgraph von G zu H kontrahierbar ist
- H heißt ***topologischer Minor*** von G, wenn ein Teilgraph von G eine Unterteilung von H ist
- G heißt ***H-frei***, falls H kein Minor von G ist
- Für eine Menge $\mathcal{H}$ von Graphen heißt G ***$\mathcal{H}$-frei***, falls kein $H \in \mathcal{H}$ ein Minor von G ist

Beispiel

Betrachte folgende Graphen:



- G_2 ist ein Minor von G_1, da G_2 durch Kontraktion der in G_1 umrandeten Kante entsteht; entsprechend ist G_3 ein Minor von G_2 und von G_1
- G_2 ist keine Unterteilung von G_3, da G_2 Knoten vom Grad 3 hat, aber G_3 nicht
- Entfernen wir jedoch die beiden Kanten e und f aus G_2, so ist der resultierende Teilgraph G_2' eine Unterteilung von G_3, d.h. G_3 ist ein topologischer Minor von G_2
- G_2 und G_3 sind aber kein topologischen Minoren von G_1, da G_2 und G_3 einen Knoten vom Grad 4 haben und G_1 nur Knoten vom Grad ≤ 3 $\triangleleft$