Graphalgorithmen

Johannes Köbler

Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

SS 2021

Organisatorisches

Aktuelle Infos auf der VL-Webseite unter

- *https://hu.berlin/graphalgo*

bzw.

- *https://www.informatik.hu-berlin.de/de/forschung/gebiete/algorithmenII/Lehre/ss21/graphalgo*

Ablauf

Skript, Folien und Aufgabenblätter

- Skript, Folien und Aufzeichnung werden jeweils nach der Vorlesung ins Netz (Webseite bzw. Moodle) gestellt
- Übungsblätter werden in der Regel donnerstags veröffentlicht
- Die Besprechung der mündlichen Aufgaben erfolgt am Donnerstag der Folgewoche
- Lösungen dazu können bis zum Tag davor in Moodle hochgeladen werden, Details siehe dort
- Die schriftlichen Aufgaben sind bis Donnerstag zwei Wochen nach Ausgabe um 13:00 Uhr abzugeben
- Fragen zu Übung und Vorlesung können im Moodle-Forum auch asynchron gestellt und diskutiert werden

Übungen

Anmeldung

- über Agnes
- und bei Moodle (wegen Punktevergabe und Bildung von Abgabegruppen)
- Mails von Agnes und von Moodle werden standardmäßig an den HU-Account gesendet (bitte regelmäßig checken)

Ausgabe der Aufgabenblätter

- über Moodle und auf der VL-Webseite

Abgabe von Lösungen

- digital über Moodle

Bearbeitung der Übungsaufgaben

- in Gruppen von bis zu drei Teilnehmern
- Lösungen für die schriftlichen Aufgaben sollten als PDF abgegeben werden
- die Abgabe von Lösungsvorschlägen für die mündlichen Aufgaben ist freiwillig und geht nicht in die Punktewertung ein
- Lösungsvorschläge für die mündlichen Aufgaben können auch per Texteingabe gemacht werden
- besonders gut gelungene Lösungen werden mit Zustimmung der/des Abgebenden im Forum veröffentlicht

Übungsschein und Prüfung

Scheinkriterien

- Lösen von mindestens 50% der schriftlichen Aufgaben

Prüfungsform

- voraussichtlich mündlich
- Der Übungsschein ist ***nicht*** Prüfungsvoraussetzung

Gibt es zum organisatorischen Ablauf noch Fragen?

Einführung

- Viele praktisch relevante Problemstellungen lassen sich durch graphentheoretische Probleme modellieren, wie zum Beispiel
  - Finden kürzester Wege zwischen Städten
  - Berechnung von Flüssen und Schnitten in Netzwerken
  - Zuordungsprobleme (Berechnung von Matchings)
  - Färbungsprobleme (Knoten- und Kantenfärbungen)
  - planare Einbettungen von Schaltkreisen usw.
- in der Graphentheorie werden kombinatorische Eigenschaften von Graphen erforscht
- in diesem Modul steht der Entwurf von effizienten Algorithmen auf Graphen im Mittelpunkt

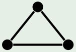
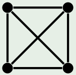
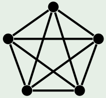
Graphentheoretische Grundlagen

Definition

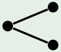
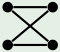
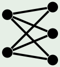
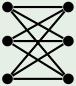
- Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei
  V - eine endliche Menge von Knoten/Ecken und
  E - die Menge der Kanten ist
- Hierbei gilt $E \subseteq \binom{V}{2} := \{\{u, v\} \subseteq V : u \neq v\}$
- Die Nachbarschaft von $v \in V$ ist $N_G(v) = \{u \in V : \{u, v\} \in E\}$
- Der Grad von v ist $\deg_G(v) = \|N_G(v)\|$
- Der Minimalgrad von G ist $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg_G(v)$ und der Maximalgrad von G ist $\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg_G(v)$
- Im Fall $\delta(G) = \Delta(G) = k$ heißt G k-regulär
- Jeder Knoten $u \in V$ vom Grad ≤ 1 heißt Blatt und die übrigen Knoten (vom Grad ≥ 2) heißen innere Knoten von G
- Falls G aus dem Kontext ersichtlich ist, lassen wir den Index G weg und schreiben auch einfach $N(v)$, $\deg(v)$, δ usw.

Beispiel

- Der vollständige Graph (V, E) auf n Knoten, d.h. $\|V\| = n$ und $E = \binom{V}{2}$, wird mit K_n und der leere Graph $(V, \emptyset)$ auf n Knoten wird mit E_n bezeichnet:

K_1  K_2  K_3  K_4  K_5 

- Der vollständige bipartite Graph (A, B, E) auf $a + b$ Knoten, d.h. $A \cap B = \emptyset$, $\|A\| = a$, $\|B\| = b$ und $E = \{\{u, v\} : u \in A, v \in B\}$ wird mit $K_{a,b}$ bezeichnet:

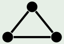
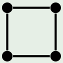
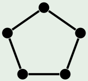
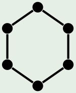
$K_{1,1}$  $K_{1,2}$  $K_{2,2}$  $K_{2,3}$  $K_{3,3}$ 

Beispiel (Fortsetzung)

- Der Pfad mit n Knoten wird mit P_n bezeichnet:

P_2  P_3  P_4  P_5 

- Der Kreis mit n Knoten wird mit C_n bezeichnet:

C_3  C_4  C_5  C_6 

◁

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ heißt unabhängig oder stabil, wenn es keine Kante von G mit beiden Endpunkten in U gibt, d.h. es gilt $E \cap \binom{U}{2} = \emptyset$
- Die Stabilitätszahl ist

$$\alpha(G) = \max\{\|U\| : U \text{ ist stabile Menge in } G\}$$

- Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ heißt Clique, wenn jede Kante mit beiden Endpunkten in U in E ist, d.h. es gilt $\binom{U}{2} \subseteq E$
- Die Cliquenzahl ist

$$\omega(G) = \max\{\|U\| : U \text{ ist Clique in } G\}$$

Definition (Fortsetzung)

- Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt Sub-/Teil-/Untergraph von $G = (V, E)$, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ ist
- Im Fall $V' = V$ wird G' auch ein (auf)spannender Teilgraph von G genannt und wir schreiben für G' auch $G - E''$ (bzw. $G = G' \cup E''$), wobei $E'' = E - E'$ die Menge der aus G entfernten Kanten ist
- Im Fall $E'' = \{e\}$ schreiben wir für G' auch einfach $G - e$ (bzw. $G = G' \cup e$)
- Ein k-regulärer spannender Teilgraph von G wird auch als k-Faktor von G bezeichnet
- Ein d-regulärer Graph G heißt k-faktorisierbar, wenn sich G in $\ell = d/k$ kantendisjunkte k-Faktoren $G_1, \ldots, G_\ell$ zerlegen lässt

Definition (Fortsetzung)

- Ein Subgraph $G' = (V', E')$ von $G = (V, E)$ heißt (durch V') induziert, falls $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ ist
- Für G' schreiben wir dann auch $G[V']$ oder $G - V''$, wobei $V'' = V - V'$ die Menge der aus G entfernten Knoten ist
- Ist $V'' = \{v\}$, so schreiben wir für G' auch einfach $G - v$ und im Fall $V' = \{v_1, \ldots, v_k\}$ auch $G[v_1, \ldots, v_k]$
- Ein Weg ist eine Folge von (nicht notwendig verschiedenen) Knoten $v_0, \ldots, v_\ell$ mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $i = 0, \ldots, \ell - 1$
- Die Länge des Weges ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten, also ℓ
- Im Fall $\ell = 0$ heißt der Weg trivial
- Ein Weg $(v_0, \ldots, v_\ell)$ heißt auch v_0-v_ℓ-Weg

Definition (Fortsetzung)

- G heißt zusammenhängend, falls es für alle Paare $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ einen u-v-Weg gibt
- Die durch die Äquivalenzklassen $V_i \subseteq V$ der Relation

$$Z = \{(u, v) \in V \times V : \text{ es gibt in } G \text{ einen } u\text{-}v\text{-Weg}\}$$

  induzierten Teilgraphen $G[V_i]$ heißen Zusammenhangskomponenten (engl. connected components) oder einfach Komponenten von G
- Ein u-v-Weg heißt einfach oder u-v-Pfad, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.
- Ein Zyklus ist ein u-v-Weg mit $u = v$

Definition (Schluss)

- Eine Menge von Pfaden heißt
  - disjunkt, wenn je zwei Pfade in der Menge keine gemeinsamen Knoten haben,
  - kantendisjunkt, wenn je zwei Pfade in der Menge keine gemeinsamen Kanten haben, und
  - knotendisjunkt, wenn je zwei Pfade in der Menge höchstens gemeinsame Endpunkte haben
- Ein Kreis ist ein Zyklus $(v_1 \ldots, v_\ell, v_1)$ der Länge $\ell \geq 3$, für den $v_1, \ldots, v_\ell$ paarweise verschieden sind
- Ein Graph heißt kreisfrei, azyklisch oder Wald, falls er keinen Kreis enthält
- Ein Baum ist ein zusammenhängender Wald

Definition

- Ein gerichteter Graph oder Digraph ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei
  V - eine endliche Menge von Knoten/Ecken und
  E - die Menge der Kanten ist
- Hierbei gilt $E \subseteq V \times V = \{(u, v) : u, v \in V\}$
- Kanten der Form (u, u) heißen Schlingen
- Die Nachfolgermenge von $v \in V$ ist $N^+(v) = \{u \in V : (v, u) \in E\}$
- Die Vorgängermenge von v ist $N^-(v) = \{u \in V : (u, v) \in E\}$
- Die Nachbarmenge von v ist $N(v) = N^+(v) \cup N^-(v)$
- Der Ausgangsgrad von v ist $\deg^+(v) = \|N^+(v)\|$ und der Eingangsgrad von v ist $\deg^-(v) = \|N^-(v)\|$
- Der Grad von v ist $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$
- Ein Knoten $w \in V$ vom Eingangsgrad $\deg^-(w) = 0$ heißt Wurzel von G, und ein Knoten $u \in V$ vom Ausgangsgrad $\deg^+(u) = 0$ heißt Blatt

Definition (Fortsetzung)

- Ein (gerichteter) v_0-v_ℓ-Weg in G ist eine Folge von Knoten $v_0, \dots, v_\ell$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \dots, \ell - 1$
- Ein (gerichteter) Zyklus ist ein gerichteter u-v-Weg mit $u = v$
- Ein gerichteter Weg heißt einfach oder (gerichteter) Pfad, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind
- Ein (gerichteter) Kreis in G ist ein gerichteter Zyklus $(v_1 \dots, v_\ell, v_1)$ der Länge $\ell \geq 1$, für den $v_1, \dots, v_\ell$ paarweise verschieden sind
- G heißt kreisfrei oder azyklisch, wenn G keinen gerichteten Kreis hat
- G heißt gerichteter Wald, wenn G kreisfrei ist und jeder Knoten $v \in V$ Eingangsgrad $\deg^-(v) \leq 1$ hat
- G heißt zusammenhängend, wenn es in G für jedes Knotenpaar $u \neq v \in V$ einen u-v-Pfad oder einen v-u-Pfad gibt
- G heißt stark zusammenhängend, wenn es in G für jedes Knotenpaar $u \neq v \in V$ sowohl einen u-v-Pfad als auch einen v-u-Pfad gibt

Definition

- Die Adjazenzmatrix eines Graphen bzw. Digraphen $G = (V, E)$ mit (geordneter) Knotenmenge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist die $(n \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})$ mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenzmatrix symmetrisch mit $a_{ii} = 0$ für $i = 1, \ldots, n$

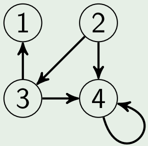
Definition (Fortsetzung)

- Bei der Adjazenzlisten-Darstellung wird für jeden Knoten v_i eine Liste mit seinen Nachbarn verwaltet
- Im gerichteten Fall verwaltet man entweder nur die Liste der Nachfolger oder zusätzlich eine weitere für die Vorgänger
- Falls die Anzahl der Knoten statisch ist, organisiert man die Adjazenzlisten in einem Feld, d.h. das Feldelement mit Index i verweist auf die Adjazenzliste von Knoten v_i
- Falls sich die Anzahl der Knoten dynamisch ändert, so werden die Adjazenzlisten typischerweise ebenfalls in einer doppelt verketteten Liste verwaltet

Datenstrukturen für Graphen

Beispiel

Betrachte den gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4\}$ und $E = \{(2, 3),\ (2, 4),\ (3, 1),\ (3, 4),\ (4, 4)\}$. Dieser hat folgende Adjazenzmatrix- und Adjazenzlisten-Darstellung:



	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	1
4	0	0	0	1