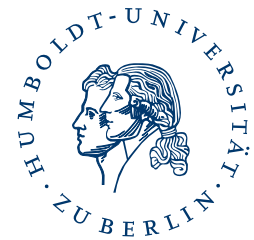
Graphalgorithmen

Johannes Köbler



Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

SS 2021

Matchings

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $M \subseteq E$.

- M heißt Matching in G, falls je zwei Kanten $e \neq e' \in M$ unabhängig sind, d.h. $e \cap e' = \emptyset$
- Die Matchingzahl von G ist

$$\mu(G) = \max\{|M| : M \text{ ist ein Matching in } G\}$$

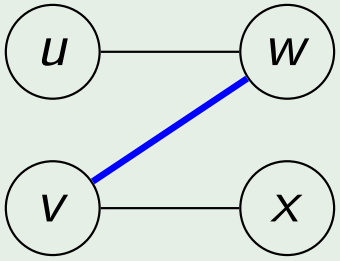
- Ein Knoten $v \in V$ heißt M-gebunden, falls v Endpunkt einer Kante $e \in M$ (also $v \in \bigcup M$) ist und sonst M-frei
- Wir sagen auch, M bindet v bzw. M lässt v frei
- Ein Matching M heißt perfekt, falls alle Knoten in G M-gebunden sind (also $V = \bigcup M$ ist)
- Ein Matching M heißt maximal (engl. *maximum*), falls $|M| = \mu(G)$ ist
- M heißt gesättigt (engl. *maximal*), falls es in keinem größeren Matching enthalten ist

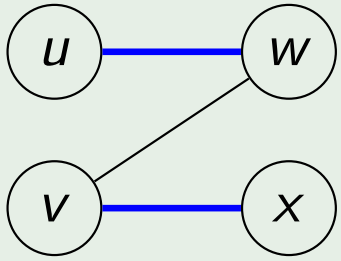
Matchings

- Offenbar ist M genau dann ein Matching, wenn $|\bigcup M| = 2|M|$ ist
- Das Ziel besteht nun darin, ein maximales Matching M zu finden

Beispiel

- Ein gesättigtes Matching muss nicht maximal sein:





- $M = \{\{v, w\}\}$ ist gesättigt, da es sich nicht erweitern lässt
- M ist jedoch kein maximales Matching, da $M' = \{\{u, w\}, \{v, x\}\}$ ein größeres Matching ist
- Die Greedy-Methode, ausgehend von $M = \emptyset$ solange Kanten zu M hinzuzufügen, bis sich M nicht mehr zu einem größeren Matching erweitern lässt, funktioniert also nicht

Matchings

Satz

In einem bipartiten Graphen $G = (U, W, E)$ lässt sich ein maximales Matching in Zeit $O(m\sqrt{n})$ bestimmen

Beweis.

- Wir konstruieren zu G das Netzwerk $N = (V, E', s, t, c)$ mit der Knotenmenge $V = U \cup W \cup \{s, t\}$ und der Kantenmenge

  $$E' = \{(u, w) \in U \times W \mid \{u, w\} \in E\} \cup \{(s, u), (w, t) \mid u \in U, w \in W\},$$

  wobei $c(e) = 1$ für alle $e \in E'$ gilt
- Da alle Knoten $u \in U \cup W$ den Durchsatz $D(u) \leq 1$ in N haben, liefert jeder Fluss f in N ein Matching $M = \{\{u, w\} \in E \mid f(u, w) = 1\}$ in G mit $|M| = |f|$ und umgekehrt
- Mit Dinitz lässt sich in N unter Verwendung von `blockfluss1` ein maximaler Fluss (und damit ein maximales Matching) in Zeit $O(m\sqrt{n})$ bestimmen, da der Durchsatz aller Knoten (außer s und t) 1 ist

□

Matchings

- In den Übungen werden wir sehen, wie sich die Laufzeit durch eine verbesserte Analyse sogar durch $O(m\sqrt{\mu})$ begrenzen lässt
- Die Konstruktion im Beweis des vorigen Satzes lässt sich nicht ohne Weiteres auf Graphen verallgemeinern, die nicht bipartit sind
- Wir werden jedoch sehen, dass sich manche bei den Flussalgorithmen verwendete Ideen auch für Matchingalgorithmen einsetzen lassen
- So lassen sich Matchings, die nicht maximal sind, ähnlich vergrößern wie dies bei Flüssen durch einen Zunahmepfad möglich ist

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei M ein Matching in G.

- Ein Pfad $P = (u_0, \ldots, u_l)$ in G der Länge $\ell \geq 1$ heißt ***M*-alternierend**, falls für $i = 1, \ldots, \ell - 1$ gilt:

$$e_i = \{u_{i-1}, u_i\} \in M \iff e_{i+1} = \{u_i, u_{i+1}\} \notin M$$

- Ein Kreis $C = (u_1, \ldots, u_\ell, u_1)$ in G heißt ***M*-alternierend**, falls der Pfad $P = (u_1, \ldots, u_\ell)$ M-alternierend ist und zudem gilt:

$$\{u_1, u_2\} \in M \iff \{u_1, u_\ell\} \notin M$$

- Ein M-alternierender Pfad $P = (u_0, \ldots, u_\ell)$ heißt ***M*-vergrößernder Pfad** (oder einfach ***M*-Pfad**), falls beide Endpunkte von P M-frei sind

Matchings

Satz (Lemma von Berge)

Ein Matching M in G ist genau dann maximal, wenn es keinen M-Pfad in G gibt

Beweis.

- Ist $P = (u_0, \ldots, u_l)$ ein M-Pfad, so liefert $M' = M \Delta P$ ein Matching der Größe $|M'| = |M| + 1$ in G, wobei wir P als Menge $\{\{u_{i-1}, u_i\} \mid i = 1, \ldots, l\}$ seiner Kanten auffassen
- Ist dagegen M nicht maximal und M' ein größeres Matching, so betrachten wir die Kantenmenge $M \Delta M'$
- Da jeder Knoten in dem Graphen $G' = (V, M \Delta M')$ höchstens den Grad 2 hat, lässt sich G' in disjunkte Kreise und Pfade zerlegen
- Da diese Kreise und Pfade M-alternierend sind, und M' größer als M ist, muss mindestens einer dieser Pfade ein M-Pfad sein □

Es genügt also, für das aktuelle Matching M einen M-Pfad zu finden

Der Algorithmus von Edmonds

- Sei G ein Graph ohne isolierte Knoten und sei M ein Matching in G
- Die Prozedur `FindePfad` gibt einen M-Pfad in G zurück, falls das aktuelle Matching M nicht bereits maximal ist
- Da M nicht mehr als $n/2$ Kanten enthalten kann, muss diese Prozedur ausgehend von $M = \emptyset$ höchstens $\lfloor n/2 + 1 \rfloor$-mal aufgerufen werden, um ein maximales Matching zu finden

Prozedur `FindePfad`(V, E, M)

```
1  Q := ∅
2  for all u ∈ V do
3    parent(u) := ⊥
4    if ∃e ∈ M : u ∈ e then
5      zustand(u) := 2          // unerreicht
6    else
7      zustand(u) := 0          // gerade
8      root(u) := u
9      Q := Q ∪ {(u, v) | {u, v} ∈ E}
```

Prozedur FindePfad(V, E, M) (Fortsetzung)

```
11 while Q ≠ ∅ do
12   entferne eine Kante (u, v) aus Q
13   if zustand(v) = 2 then
14     parent(v) := u; parent(M(v)) := v; zustand(v) := 1  // ungerade
15     zustand(M(v)) := 0; root(M(v)) := root(v) := root(u)
16     Q := Q ∪ {(M(v), w) | {M(v), w} ∈ E \ M}
17   if zustand(v) = 0 then
18     if root(u) = root(v) then // Blüte gefunden
19       kontrahiere in W die Blüte C zu ihrer Basis b und speichere den
20       Kreis C unter der Basis b ab
21       füge zu Q für jede Kante {c, a} ∈ E mit c ∈ C ungerade und
22       a ∉ C die Kante (b, a) hinzu
23     else // M-Pfad gefunden
24       setze die parent-Pfade P_u und P_v von u und v mit Hilfe
25       der Kante {u, v} zu einem r_u-r_v-Pfad P' zusammen
26       und expandiere P' zu einem M-Pfad P in G; return P
27 return ⊥
```

Der Algorithmus von Edmonds

- Die Prozedur `FindePfad` sucht wie folgt nach einem M-Pfad in G
- Jeder Knoten u hat einen von 3 Zuständen: gerade (0), ungerade (1) oder unerreicht (2)
- Zu Beginn sind alle M-freien Knoten gerade und alle M-gebundenen Knoten unerreicht
- Dann wird ausgehend von den M-freien Knoten als Wurzeln ein Suchwald W für G aufgebaut
- Hierzu wird Q als Menge aller Kanten (u, v) initialisiert, so dass u gerade (also eine Wurzel) und $\{u, v\} \in E$ ist
- In der while-Schleife werden dann die zu Q hinzugefügten Kanten $e = (u, v)$ besucht, wobei Kanten zu einem ungeraden Knoten v ignoriert werden

Der Algorithmus von Edmonds

- Ist v unerreicht, so wird der aktuelle Suchwald W nicht nur um die Kante e, sondern auch um die Matching-Kante $\{v, M(v)\}$ erweitert, wobei $M(v)$ der Matchingpartner von v ist
- Zudem wechselt der Zustand von v von unerreicht zu ungerade und der von $M(v)$ von unerreicht zu gerade
- Somit erhält jeder erreichte Knoten v genau dann den Zustand gerade, wenn der Pfad zwischen v und seiner Wurzel r_v in W eine gerade Länge hat
- Um diesen Wurzelpfad effizient berechnen zu können, wird die Funktion `parent` benutzt

Der Algorithmus von Edmonds

- Ist v dagegen wie u gerade, so gibt es zwei Unterfälle
- Haben u und v verschiedene Wurzeln $r_u \neq r_v$, so lassen sich die beiden `parent`-Pfade P_u von u und P_v von v mit Hilfe der Kante $\{u, v\}$ zu einem Pfad P' zusammensetzen, der die beiden M-freien Wurzeln r_u und r_v verbindet
- Da vor dem Auffinden von P' möglicherweise Blüten kontrahiert wurden (siehe unten), muss P' evtl. noch expandiert werden, um einen M-Pfad P in G zu erhalten

Der Algorithmus von Edmonds

- Im Fall $r_u = r_v$ befinden sich die beiden Knoten u und v im gleichen Suchbaum von W, d.h. die beiden `parent`-Pfade P_u und P_v haben dieselbe Wurzel $r = r_u = r_v$
- Sei b der erste Knoten, in dem P_u und P_v aufeinander treffen
- Da b (mindestens) 2 Kinder in W hat und ungerade Knoten nur ein Kind in W haben, muss b gerade sein
- Da auch u und v gerade sind, haben sie auf P_u bzw. P_v einen geraden Abstand zu b
- Der b-u-Teilpfad von P_u und der b-v-Teilpfad von P_v bilden also zusammen mit der Kante $\{u, v\}$ einen ungerichteten Kreis C ungerader Länge, der als Blüte mit der Basis b bezeichnet wird
- Da die ungeraden Knoten auf C durch die Kontraktion von C einen geraden Abstand zu ihrer Wurzel erhalten, wird für jede Kante $\{c, a\}$ in E mit $c \in C$ ungerade und $a \notin C$ die Kante (b, a) zu Q hinzugefügt

Der Algorithmus von Edmonds

- Zwar führt das Auffinden einer Blüte C nicht direkt zu einem M-Pfad
- Sie bedeutet dennoch einen Fortschritt, da sich G und W durch die Kontraktion von C zur Basis b verkleinern lassen
- In den kontrahierten Graphen G_C und W_C erbt b die Nachbarschaften aller Knoten in C zu den Knoten außerhalb von C
- Zudem wird zu Q für jede Kante $\{c, a\} \in E$ mit $c \in C$ ungerade und $a \notin C$ die Kante (b, a) hinzugefügt
- Entfernen wir aus M alle Kanten, die auf dem Kreis C liegen, so erhalten wir ein Matching M_C in G_C
- Das folgende Lemma zeigt, wie sich aus einem M_C-Pfad in G_C ein M-Pfad in G rekonstruieren lässt

Der Algorithmus von Edmonds

Lemma. Sei C eine Blüte in G mit Basis b.

Dann ist jeder M_C-Pfad P_C in G_C zu einem M-Pfad P in G expandierbar

Beweis.

- Falls P_C nicht schon selbst ein M-Pfad in G ist, muss P_C eine Kante e enthalten, die in G fehlt
- Da durch die Kontraktion von C zu b in G_C nur solche Kanten neu entstehen, die die Basis b mit einem Knoten a außerhalb der Blüte C verbinden, muss e die Form $e = \{a, b\}$ haben
- Zudem muss a in G einen Nachbarn $c \neq b$ auf der Blüte C haben

Der Algorithmus von Edmonds

Beweis (Fortsetzung).

- Von c aus führen auf dem Kreis C genau zwei Pfade zur Basis b, wovon nur einer den Knoten c über eine Matchingkante verlässt (also gerade Länge hat)
- Indem wir diesem Pfad die Kante $\{a, c\}$ hinzufügen, erhalten wir einen M-alternierenden a-b-Pfad P' in G
- Wir können also P_C zu einem M-Pfad P in G expandieren, indem wir die Kante $\{a, b\}$ durch den a-b-Pfad P' ersetzen □

Der Algorithmus von Edmonds

- Da sich die Anzahl der Knoten bei jeder Kontraktion einer Blüte mindestens um 2 verringert, können höchstens $n/2$ Blüten gefunden werden
- Bei Verwendung entsprechender Datenstrukturen zur Verwaltung der Blüten lässt sich die Prozedur `FindePfad` in Zeit $O(m)$ implementieren, was auf eine Gesamtlaufzeit von $O(nm)$ für den Algorithmus von Edmonds führt
- Tatsächlich lässt sich die Laufzeit noch auf $O(m\sqrt{\mu})$ verringern
- Dazu berechnet man ähnlich wie bei Verwendung von Dinitz im bipartiten Fall pro Runde nicht nur einen M-Pfad, sondern in Zeit $O(m)$ eine maximale Menge knotendisjunkter M-Pfade, die alle eine minimale Länge haben
- Dann kann man wieder zeigen, dass $O(\sqrt{\mu})$ solcher Runden ausreichen, um ein maximales Matching zu finden
- Diese Strategie führt auf den Hopcroft-Karp-Algorithmus im bipartiten Fall und auf den Micali-Vazirani-Algorithmus für beliebige Graphen

Der Algorithmus von Edmonds

- Für den Beweis der Korrektheit des Edmonds-Algorithmus (genauer: zum Nachweis der Maximalität des berechneten Matchings) benötigen wir den Begriff der Odd Set Cover in einem Graphen G
- Sei M ein Matching und sei C eine Knotenüberdeckung in G
- Da jede Kante e in M mindestens einen Endpunkt in C hat, aber keine Kanten in M einen gemeinsamen Endpunkt haben, folgt $|M| \leq |C|$
- Wir werden sehen, dass es in jedem bipartiten Graphen sogar ein Matching M und eine Knotenüberdeckung C mit $|M| = |C|$ gibt
- Die Angabe einer Knotenüberdeckung C mit $|C| = |M|$ bietet also eine einfache Möglichkeit, die Maximalität von M nachzuweisen
- Dies geht jedoch nicht in allen Graphen, da z.B. der K_4 nur Matchings der Größe ≤ 2 und Knotenüberdeckungen der Größe ≥ 3 hat

Der Algorithmus von Edmonds

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Eine Menge $S = \{v_1, \ldots, v_k, V_1, \ldots, V_\ell\}$ von Knoten $v_1, \ldots, v_k \in V$ und Teilmengen $V_1, \ldots, V_\ell \subseteq V$ heißt Odd Set Cover (OSC) in G, falls

- es für jede Kante $e \in E$ einen Knoten $v_i \in S$ mit $v_i \in e$ oder eine Menge $V_j \in S$ mit $e \subseteq V_j$ gibt und
- alle Mengen $V_j \in S$ eine ungerade Größe $n_j = |V_j|$ haben

Das Gewicht von S ist $w(S) = k + \sum_{j=1}^{\ell}(n_j - 1)/2$

Im Fall $\ell = 0$ ist $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ also eine Knotenüberdeckung oder vertex cover (VC) in G

Der Algorithmus von Edmonds

Beispiel

- Der $K_{i,j}$, $i \leq j$, hat die Matchingzahl $\mu(K_{i,j}) = i$ und eine kleinste VC ist $C = \{1, \ldots, i\}$, die auch eine OSC vom Gewicht $w(C) = i$ ist
- Der K_n hat die Matchingzahl $\mu(K_n) = \lfloor n/2 \rfloor$ und eine kleinste VC ist $C = \{1, \ldots, n-1\}$, während $S = \{n, \{1, \ldots, n-1\}\}$ für gerades n und $S = \{V(K_n)\}$ für ungerades n eine OSC vom Gewicht $w(S) = \lfloor n/2 \rfloor$ ist, wobei $V(G)$ die Knotenmenge eines Graphen G bezeichnet
- Der C_n hat die Matchingzahl $\mu(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$ und eine kleinste VC ist $C = \{1, 3, 5, \ldots, n-1\}$ für gerades n und $C = \{1, 3, 5, \ldots, n-1, n\}$ für ungerades n, während $S = \{1, 3, 5, \ldots, n-1\}$ für gerades n und $S = \{V(C_n)\}$ für ungerades n eine OSC vom Gewicht $w(S) = \mu(C_n)$ ist

Der Algorithmus von Edmonds

Beispiel (Fortsetzung).

- Der vollständige Splitgraph $S_{i,j} = K_i + E_j$ hat im Fall $i \leq j$ die Matchingzahl $\mu(S_{i,j}) = i$ und eine kleinste VC ist $C = \{1, \ldots, i\}$, die auch eine OSC vom Gewicht $w(C) = i$ ist
- Dagegen hat $S_{i,j}$ im Fall $i > j$ die Matchingzahl $\mu(S_{i,j}) = \lfloor n/2 \rfloor$ und eine kleinste VC ist $C = \{1, \ldots, i\}$, während $S = \{V(S_{i,j})\}$ eine OSC vom Gewicht $w(S) = \mu(S_{i,j})$ ist ◁

Lemma

Für jedes Matching M in einem Graphen $G = (V, E)$ und jede OSC $S = \{v_1, \ldots, v_k, V_1, \ldots, V_\ell\}$ in G gilt $|M| \leq w(S)$

Beweis.

M kann für jeden Knoten $v_i \in S$ höchstens eine Kante e mit $v_i \in e$ und für jede Menge $V_j \in S$ höchstens $(n_j - 1)/2$ Kanten $e \subseteq V_j$ enthalten □

Der Algorithmus von Edmonds

Satz. Sei M ein Matching in G.

Falls `FindePfad`(G, M) keinen M-Pfad findet, ist M maximal

Beweis.

- Wir benutzen die Klassifikation der Knoten von G zum Zeitpunkt des Abbruchs der erfolglosen Suche nach einem M-Pfad, um eine OSC S für G mit $w(S) = |M|$ zu finden
- Sei V_0 die Menge der geraden, $V_1 = \{u_1, \ldots, u_k\}$ die der ungeraden und V_2 die der unerreichten Knoten zu diesem Zeitpunkt
- Weiter seien $b_1, \ldots, b_\ell$ die Knoten in V_0, zu denen die gefundenen Blüten kontrahiert wurden, und für $j = 1, \ldots, \ell$ sei $C_j \subseteq V$ die Menge aller Knoten, die zu b_j kontrahiert wurden (d.h. von den Knoten in C_j ist nur noch b_j in V_0 vorhanden)
- Es ist klar, dass die Größe $n_j = |C_j|$ von C_j ungerade ist, da C_j durch eine Folge von Kontraktionen auf b_j verkleinert wird und dabei jedesmal gerade viele Knoten aus C_j entfernt werden

Der Algorithmus von Edmonds

Beweis (Fortsetzung).

- Zudem sei $V_0' = V_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_\ell = V \setminus (V_1 \cup V_2)$ die Menge aller geraden und zu einem geraden Knoten kontrahierten Knoten in G
- Dann kann es in G keine Kante $\{u, v\}$ zwischen V_0' und V_2 geben
- Da nämlich $u \in V_0'$ gerade ist oder zu einer Menge C_j gehört und $v \in V_2$ unerreicht ist, hätte sonst `FindePfad` die Kante (u, v) oder eine Kante (u', v) mit $u' \in C_j$ zu Q hinzugefügt und somit wäre v bei Entnahme dieser Kante aus Q ungerade geworden
- Weiterhin muss jede Kante e in G mit $e \subseteq V_0'$ in einer Menge C_j liegen
- Sonst wäre nämlich zu Q eine Kante (u, v) mit $\{u, v\} \subseteq V_0$ hinzugefügt worden, deren Entnahme aus Q entweder zu einer weiteren Blüte oder zu einem M-Pfad geführt hätte
- Folglich muss jede Kante $e \in E$ entweder
  - einen ungeraden Endpunkt haben (d.h. $e \cap V_1 \neq \emptyset$) oder
  - komplett in einer Menge C_j liegen (d.h. $\exists j : e \subseteq C_j$) oder
  - zwei unerreichte Knoten verbinden (d.h. $e \subseteq V_2$)

Der Algorithmus von Edmonds

Beweis (Schluss).

- Nun können wir die Menge $S = \{u_1, \ldots, u_k, C_1, \ldots, C_\ell\}$ wie folgt zu einer OSC erweitern
- Im Fall, dass $V_2 \neq \emptyset$ ist, fügen wir einen beliebigen Knoten in V_2 als Einzelknoten u_0 zu S hinzu
- Ist $|V_2| \geq 4$, so fügen wir zu S noch die Menge $C_0 = V_2 \setminus \{u_0\}$ hinzu
- Da alle Knoten in V_2 durch eine Matchingkante $e \subseteq V_2$ gebunden sind, ist $|V_2|$ gerade und somit $n_0 = |C_0|$ ungerade
- Dann ist S eine OSC für G, da jede Kante $e \in E$ entweder einen Endpunkt in S hat oder von einer der Mengen $C_j \in S$ überdeckt wird
- Zudem gilt $w(S) = |M|$ da sich M in $|S|$ Mengen
  - $M_i = \{e \in M \mid u_i \in e\}$ der Größen $|M_i| = 1$ und
  - $M'_j = \{e \in M \mid e \subseteq C_j\}$ der Größen $|M'_j| = (n_j - 1)/2$

  zerlegen lässt

□

Der Algorithmus von Edmonds

Der Algorithmus von Edmonds lässt sich leicht so erweitern, dass er in Zeit $O(nm)$ neben dem berechneten Matching M eine OSC S mit $w(S) = |M|$ ausgibt, um die Maximalität von M nachzuweisen

Korollar

- Für jeden Graphen G gilt

$$\mu(G) = \min\{w(S) \colon S \text{ ist eine OSC in } G\}$$

- Für bipartite Graphen G gilt (Satz von König)

$$\mu(G) = \min\{|C| \colon C \text{ ist eine Knotenüberdeckung in } G\}$$

- Im bipartiten Fall lässt sich eine (kleinste) Knotenüberdeckung C der Größe $|C| = \mu(G)$ in Zeit $O(m\sqrt{\mu(G)})$ berechnen

Der Algorithmus von Edmonds

Beweis des Satzes von König

- Sei $G = (A, B, E)$ und sei $W = (V_W, E_W)$ der Suchwald beim Abbruch der erfolglosen Suche nach einem M-Pfad durch den Algorithmus von Edmonds
- Da G bipartit ist, gibt es keine ungeraden Kreise und somit keine Blüten
- Daher hat jede Kante $e \in E$ entweder einen ungeraden Endpunkt oder ist in V_2 enthalten
- Da jede Kante $e \in E$ einen Endpunkt in A hat, ist $C = V_1 \cup (V_2 \cap A)$ eine VC in G
- Zudem ist $|C| = |M|$, da keine Matchingkante zwei Endpunkte in C hat
- Um C in Zeit $O(m\sqrt{\mu})$ zu erhalten, berechnen wir zuerst mit dem Algorithmus von Dinitz in Zeit $O(m\sqrt{\mu})$ ein maximales Matching M für G und starten danach die Prozedur `FindePfad`(G, M) zum Aufbau des Suchwalds W in Zeit $O(n + m)$, aus dem sich C ablesen lässt □