

# Graphalgorithmen

Johannes Köbler



Institut für Informatik  
Humboldt-Universität zu Berlin

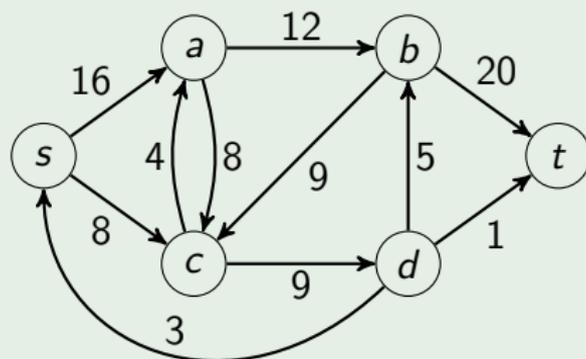
SS 2021

# Flüsse in Netzwerken

## Definition

- Ein **Netzwerk**  $N = (V, E, s, t, c)$  besteht aus einem gerichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit einer **Quelle**  $s \in V$  und einer **Senke**  $t \in V$  sowie einer **Kapazitätsfunktion**  $c : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$
- Dabei muss jede Kante  $(u, v) \in E$  eine Kapazität  $c(u, v) > 0$  und jede Nichtkante  $(u, v) \notin E$  muss die Kapazität  $c(u, v) = 0$  haben

Beispiel. Die folgende Abbildung zeigt ein Netzwerk  $N$ .



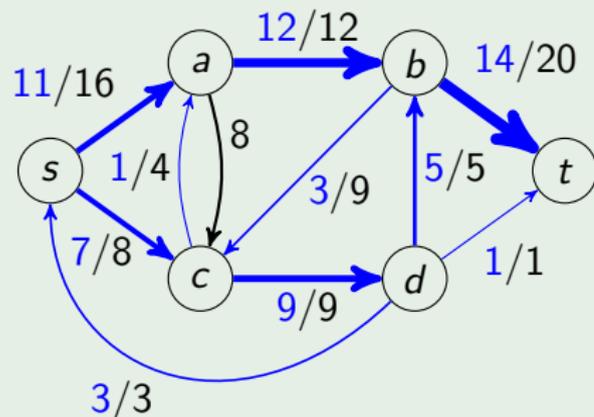
# Flüsse in Netzwerken

Definition. Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk.

- Ein **Fluss** in  $N$  ist eine Funktion  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}$  mit
    - $f(u, v) \leq c(u, v)$  (Kapazitätsbedingung)
    - $f(u, v) = -f(v, u)$  (Antisymmetrie)
    - $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$  für alle  $u \in V \setminus \{s, t\}$  (Kontinuität)
  - Die **Größe von  $f$**  ist  $|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$
  - Der **Fluss in den Knoten  $u$**  ist  $f^-(u) = \sum_{v \in V} \max\{0, f(v, u)\}$
  - Der **Fluss aus  $u$**  ist  $f^+(u) = \sum_{v \in V} \max\{0, f(u, v)\}$
- 
- Die Antisymmetrie impliziert, dass  $f(u, u) = 0$  für alle  $u \in V$  gilt und  $|f| = f^+(s) - f^-(s)$  ist
  - Wir können also annehmen, dass  $c(u, u) = 0$  für alle Knoten  $u \in V$  gilt und somit  $G = (V, E)$  schlingenfrei ist
  - Die Kontinuität besagt, dass  $f^+(u) = f^-(u)$  für alle  $u \in V \setminus \{s, t\}$  gilt

## Beispiel (Fortsetzung).

- Die Abbildung zeigt einen Fluss  $f$  in  $N$ :



$u$	$s$	$a$	$b$	$c$	$d$	$t$
$f^+(u)$	18	12	17	10	9	0
$f^-(u)$	3	12	17	10	9	15

- Dieser hat die Größe  $|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) = 11 + 7 - 3 = 15$

# Der Ford-Fulkerson-Algorithmus

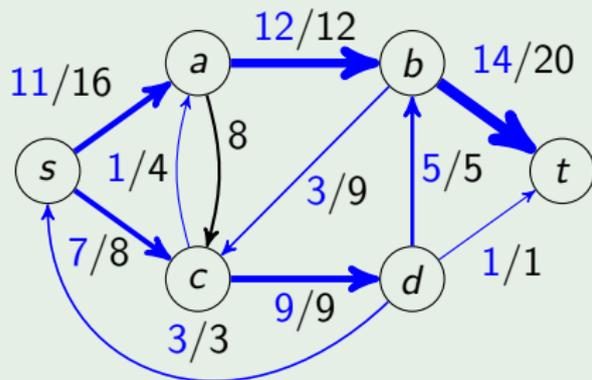
- Wie kann man für einen Fluss  $f$  in einem Netzwerk  $N$  entscheiden, ob er vergrößert werden kann?
- Diese Frage ist leicht zu beantworten, falls  $f$  auf  $V \times V$  den Wert 0 hat
- In diesem Fall genügt es, in  $G = (V, E)$  einen  $s$ - $t$ -Pfad zu finden
- Andernfalls können wir ein Netzwerk  $N_f$  konstruieren, in dem sich der Nullfluss genau dann vergrößern lässt, wenn sich  $f$  in  $N$  vergrößern lässt

## Definition

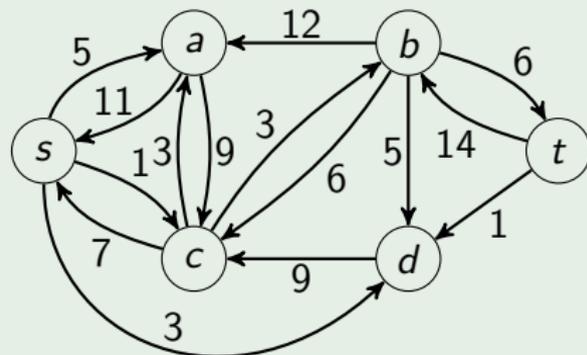
- Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk und sei  $f$  ein Fluss in  $N$
- Das zugeordnete Restnetzwerk ist  $N_f = (V, E_f, s, t, c_f)$  mit
  - den Kapazitäten  $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$  und
  - der Kantenmenge  $E_f = \{(u, v) \in V \times V : c_f(u, v) > 0\}$

Beispiel (Fortsetzung). Der Fluss  $f$  führt auf das folgende Restnetzwerk

Fluss  $f$ :



Restnetzwerk  $N_f$ :



# Flüsse in Netzwerken

Definition. Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk.

- Dann heißt jeder  $s$ - $t$ -Pfad  $P$  in  $(V, E)$  **Zunahmepfad** in  $N$
- Die **Kapazität von  $P$**  in  $N$  ist

$$c(P) = \min\{c(u, v) : (u, v) \text{ liegt auf } P\}$$

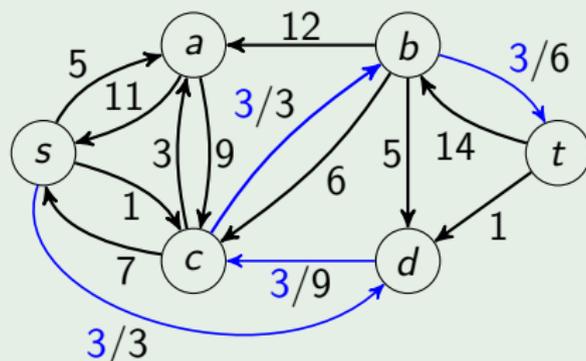
- und der **Fluss durch  $P$  in  $N$**  ist

$$f_P(u, v) = \begin{cases} c(P), & (u, v) \text{ liegt auf } P \\ -c(P), & (v, u) \text{ liegt auf } P \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Es ist leicht zu sehen, dass  $f_P$  tatsächlich ein Fluss in  $N$  ist
- Ein Pfad  $P = (u_0, \dots, u_k)$  ist also ein Zunahmepfad in  $N$ , falls
  - $u_0 = s$  und  $u_k = t$  ist
  - die Knoten  $u_0, \dots, u_k$  paarweise verschieden sind, und
  - $c(u_i, u_{i+1}) > 0$  für  $i = 0, \dots, k - 1$  gilt

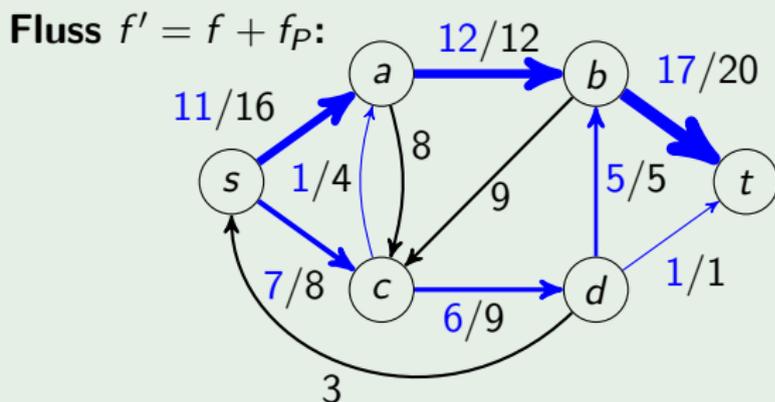
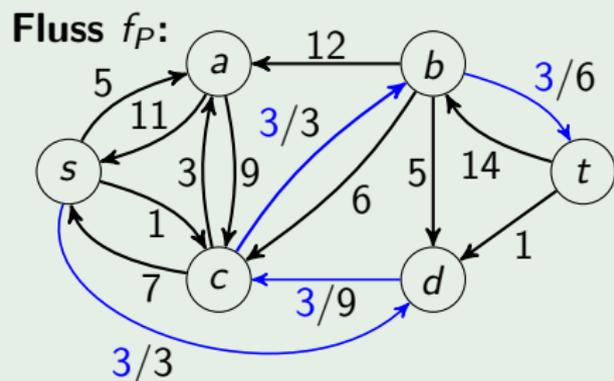
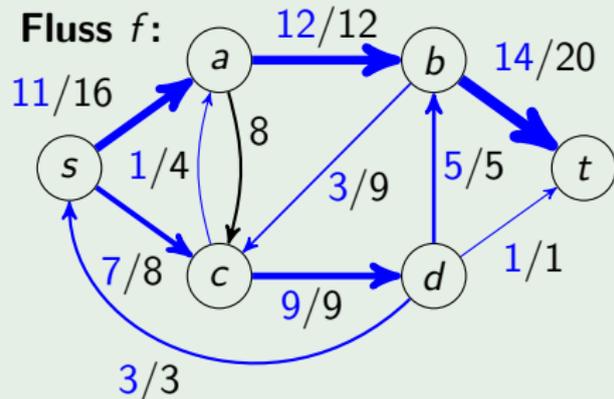
## Beispiel (Fortsetzung).

Die folgende Abbildung zeigt den Zunahmepfad  $P = (s, d, c, b, t)$  in  $N_f$  mit der Kapazität  $c_f(P) = 3$  und den zugehörigen Fluss  $f_P$  in  $N_f$



Durch Addition der beiden Flüsse  $f$  und  $f_P$  erhalten wir einen Fluss  $f' = f + f_P$  in  $N$  der Größe  $|f'| = |f| + |f_P| = |f| + c_f(P) > |f|$

## Beispiel (Fortsetzung).

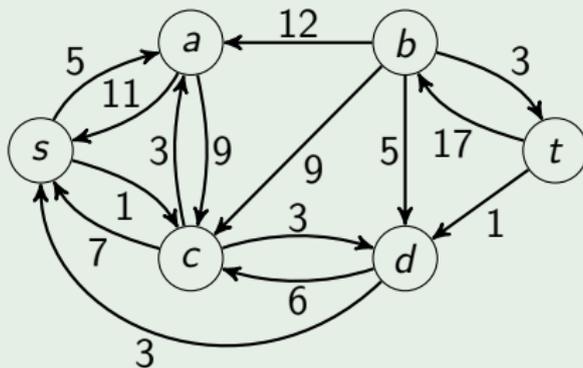


## Flüsse in Netzwerken

**Algorithmus** Ford-Fulkerson( $V, E, s, t, c$ )

- 1 **for all**  $(u, v) \in E \cup E^R$  **do**
- 2      $f(u, v) := 0$
- 3 **while** es gibt einen Zunahmepfad  $P$  in  $N_f$  **do**
- 4      $f := f + f_P$

Beispiel. Für den neuen Fluss erhalten wir nun folgendes Restnetzwerk:



In diesem existiert kein Zunahmepfad mehr

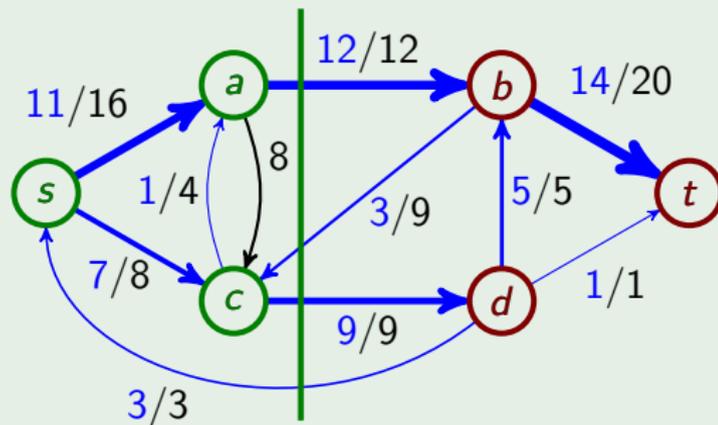
Um zu zeigen, dass der Algorithmus von Ford-Fulkerson tatsächlich einen Maximalfluss berechnet, weisen wir nach, dass  $f$  maximale Größe in  $N$  hat, wenn im Restnetzwerk  $N_f$  kein Zunahmepfad existiert

**Definition.** Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk und sei  $f$  ein Fluss in  $N$ .

- Eine Menge  $S$  mit  $\emptyset \subsetneq S \subsetneq V$  heißt **Schnitt** durch  $N$
- Der zugehörige **Kantenschnitt** ist  $E(S) = \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \notin S\}$  (dieser wird oft auch einfach als **Schnitt** bezeichnet)
- Die **Kapazität eines Schnittes**  $S$  ist  $c(S) = \sum_{e \in E(S)} c(e)$
- Der **Fluss durch den Schnitt**  $S$  ist  $f(S) = \sum_{e \in E(S)} f(e)$
- Ist  $u \in S$  und  $v \notin S$ , so wird  $S$  auch als **u-v-Schnitt** bezeichnet

## Beispiel

- Betrachte folgenden  $s$ - $t$ -Schnitt  $S = \{s, a, c\}$  durch das Netzwerk  $N$  mit dem Fluss  $f$ :

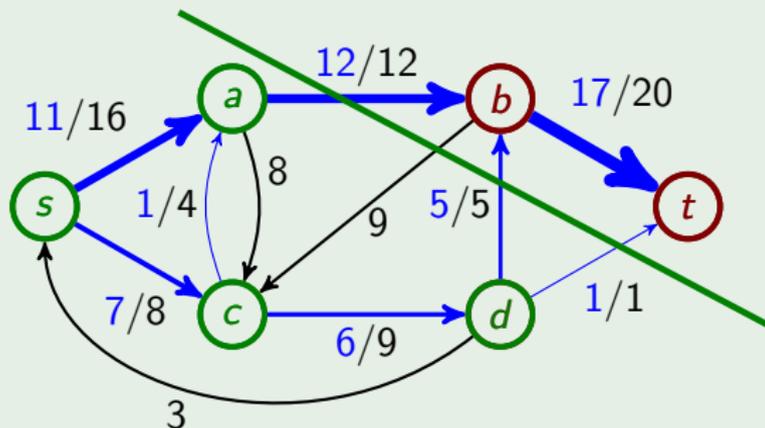


- Die Kapazität von  $S$  ist  $c(S) = c(a, b) + c(c, d) = 12 + 9 = 21$  und die Größe des Flusses  $f$  durch den Schnitt  $S$  ist

$$f(S) = f(a, b) + f(c, b) + f(c, d) + f(s, d) = 12 - 3 + 9 - 3 = 15$$

## Beispiel (Fortsetzung).

- Dagegen hat der  $s$ - $t$ -Schnitt  $S' = \{s, a, c, d\}$  durch das Netzwerk  $N$  mit dem Fluss  $f'$



die Kapazität  $c(S') = c(a, b) + c(d, b) + c(d, t) = 12 + 5 + 1 = 18$

- Diese stimmt mit der Größe des Flusses  $f'$  durch den Schnitt  $S'$  überein:

$$f'(S') = f'(a, b) + f'(d, b) + f'(d, t) = 12 + 5 + 1 = 18$$

## Lemma

Für jeden Fluss  $f$  in einem Netzwerk  $N$  und jeden  $s$ - $t$ -Schnitt  $S$  durch  $N$  gilt  $|f| = f(S) \leq c(S)$

## Beweis.

- Wir zeigen zuerst die Ungleichung  $f(S) \leq c(S)$
- Wegen  $f(e) \leq c(e)$  für alle  $e \in V \times V$  gilt

$$f(S) = \sum_{e \in E(S)} f(e) \leq \sum_{e \in E(S)} c(e) = c(S)$$

- Die Gleichheit  $|f| = f(S)$  zeigen wir durch Induktion über  $k = |S|$ 
  - Im Fall  $k = 1$  (IA) ist  $S = \{s\}$  und wegen  $f(s, s) = 0$  folgt

$$|f| = \sum_v f(s, v) = \sum_{v \neq s} f(s, v) = f(S)$$

# Der Ford-Fulkerson-Algorithmus

## Beweis (Fortsetzung).

- Für den IS sei  $S$  ein  $s$ - $t$ -Schnitt mit  $|S| = k \geq 2$  und sei  $S'$  der Schnitt  $S - \{w\}$ , wobei wir  $w \in S - \{s\}$  beliebig wählen
- Nach IV gilt dann  $|f| = f(S')$  und wegen  $S = S' \cup \{w\}$  folgt

$$f(S) = \sum_{u \in S, v \notin S} f(u, v) = \sum_{u \in S', v \notin S} f(u, v) + \sum_{v \notin S} f(w, v)$$

- Zudem folgt wegen  $V \setminus S' = (V \setminus S) \cup \{w\}$

$$f(S') = \sum_{u \in S', v \notin S'} f(u, v) = \sum_{u \in S', v \notin S} f(u, v) + \sum_{u \in S'} f(u, w)$$

- Daher erhalten wir

$$f(S) - f(S') = \sum_{v \notin S} f(w, v) - \sum_{u \in S'} \underbrace{f(u, w)}_{=-f(w, u)} = \sum_{v \neq w} f(w, v) = 0$$

- Also gilt  $f(S) = f(S') = |f|$



# Der Ford-Fulkerson-Algorithmus

## Satz (Max-Flow-Min-Cut-Theorem)

Für einen Fluss  $f$  in einem Netzwerk  $N = (V, E, s, t, c)$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- ①  $f$  ist maximal, d.h. für jeden Fluss  $f'$  in  $N$  gilt  $|f'| \leq |f|$
- ② Im Restnetzwerk  $N_f$  existiert kein Zunahmepfad
- ③ Es gibt einen  $s$ - $t$ -Schnitt  $S$  durch  $N$  mit  $c(S) = |f|$

## Beweis.

- Die Implikation ①  $\Rightarrow$  ② ist klar, da die Existenz eines Zunahmepfads in  $N_f$  zu einer Vergrößerung von  $f$  führen würde
- Für die Implikation ②  $\Rightarrow$  ③ betrachten wir den Schnitt

$$S = \{u \in V \mid u \text{ ist in } N_f \text{ von } s \text{ aus erreichbar}\}$$

- Dann gilt  $t \notin S$  (da in  $N_f$  kein Zunahmepfad existiert)

## Beweis (Fortsetzung).

- Für die Implikation ②  $\Rightarrow$  ③ betrachten wir den Schnitt

$$S = \{u \in V \mid u \text{ ist in } N_f \text{ von } s \text{ aus erreichbar}\}$$

- Dann gilt  $t \notin S$  (da in  $N_f$  kein Zunahmepfad existiert)
- Zudem haben alle Kanten  $e = (u, v) \in E(S)$  die Restkapazität  $c_f(e) = c(e) - f(e) = 0$  (sonst wäre mit  $u$  auch  $v$  in  $S$  enthalten)
- Daher folgt

$$|f| = f(S) = \sum_{e \in E(S)} f(e) = \sum_{e \in E(S)} c(e) = c(S)$$

- Die Implikation ③  $\Rightarrow$  ① folgt direkt aus obigem Lemma, da jeder Fluss  $f'$  in  $N$  im Fall  $c(S) = |f|$  einen Wert  $|f'| = f'(S) \leq c(S) = |f|$  hat  $\square$

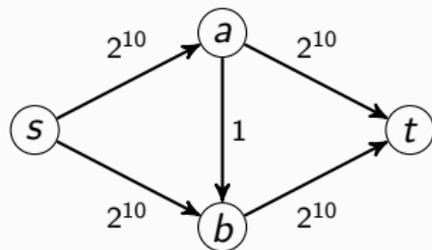
Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem gilt auch für Netzwerke mit beliebigen reellen Kapazitäten  $c(e) \geq 0$

# Der Ford-Fulkerson-Algorithmus

- Ist  $c_0 = c(S)$  die Kapazität des Schnittes  $S = \{s\}$ , so durchläuft der Ford-Fulkerson-Algorithmus die while-Schleife höchstens  $c_0$ -mal, da sich der aktuelle Fluss in jedem Durchlauf um mindestens 1 erhöht
- Bei jedem Durchlauf ist zuerst das Restnetzwerk  $N_f$  und danach ein Zunahmepfad in  $N_f$  zu berechnen
  - Die Berechnung des Zunahmepfades  $P$  kann durch Breitensuche in Zeit  $\mathcal{O}(n + m)$  erfolgen
  - Da sich das Restnetzwerk nur entlang von  $P$  ändert, kann es in Zeit  $\mathcal{O}(n)$  aktualisiert werden
- Jeder Durchlauf benötigt also Zeit  $\mathcal{O}(n + m)$ , was auf eine Gesamtlaufzeit von  $\mathcal{O}(c_0(n + m))$  führt
- Da der Wert von  $c_0$  jedoch exponentiell in der Länge der Eingabe (also der Beschreibung des Netzwerkes  $N$ ) sein kann, ergibt dies keine polynomiell beschränkte Laufzeit
- Bei Netzwerken mit reellen Kapazitäten kann Ford-Fulkerson sogar unendlich lange laufen (siehe Übungen)

# Der Ford-Fulkerson-Algorithmus

- Bei nebenstehendem Netzwerk benötigt Ford-Fulkerson zur Bestimmung des Maximalflusses abhängig von der Wahl der Zunahmepfade zwischen 2 und  $2^{11}$  Schleifendurchläufe
- Im günstigsten Fall wird nämlich ausgehend vom Nullfluss  $f_0$  zuerst der Zunahmepfad  $P_1 = (s, a, t)$  mit der Kapazität  $2^{10}$  und dann im Restnetzwerk  $N_{f_1}$  der Pfad  $P_2 = (s, b, t)$  mit der Kapazität  $2^{10}$  gewählt
- Im ungünstigsten Fall werden abwechselnd die beiden Zunahmepfade  $P_1 = (s, a, b, t)$  und  $P_2 = (s, b, a, t)$  (also  $P_i = P_1$  für ungerades  $i$  und  $P_i = P_2$  für gerades  $i$ ) mit der Kapazität 1 gewählt. Dies führt auf insgesamt  $2^{11}$  Schleifendurchläufe (siehe folgende Tabelle)



$i$	Fluss $f_{P_i}$ in $N_{f_i}$	neuer Fluss $f_{i+1}$ in $N$
1		
2		
⋮		
$2j - 1,$ $1 < j \leq 2^{10}$		

## Der Ford-Fulkerson-Algorithmus

$2j - 1,$ $1 < j \leq 2^{10}$		
$2j,$ $1 < j < 2^{10}$		
$\vdots$		
$2^{11}$		

Nicht nur in diesem Beispiel lässt sich die exponentielle Laufzeit wie folgt vermeiden:

- Man betrachtet nur Zunahmepfade mit einer geeignet gewählten Mindestkapazität
  - Dies führt auf eine Laufzeit, die polynomiell in  $n$ ,  $m$  und  $\log c_0$  ist
- Man bestimmt in jeder Iteration einen kürzesten Zunahmepfad im Restnetzwerk mittels Breitensuche in Zeit  $\mathcal{O}(n + m)$ 
  - Diese Vorgehensweise führt auf den **Edmonds-Karp-Algorithmus**, der eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(nm^2)$  hat (unabhängig von den Kapazitäten)
  - Diesen werden wir als nächstes betrachten

# Der Ford-Fulkerson-Algorithmus

- **Dinitz** hatte die Idee, in jeder Iteration einen **blockierenden** Fluss  $g$  in  $N_f$  zu berechnen
  - Dieser benutzt nur Kanten, die auf einem kürzesten  $s$ - $t$ -Pfad in  $N_f$  liegen, und **sättigt** auf jedem kürzesten  $s$ - $t$ -Pfad mindestens eine Kante  $e$  (d.h.  $g(e) = c_f(e)$ ), die dann in der nächsten Iteration fehlt
  - Da die Länge der kürzesten  $s$ - $t$ -Pfade im Restnetzwerk in jeder Iteration um mindestens eins zunimmt, liegt nach spätestens  $n - 1$  Iterationen ein maximaler Fluss vor
  - Dinitz hat gezeigt, dass der Fluss  $g$  in Zeit  $\mathcal{O}(mn)$  bestimmt werden kann, was auf eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(n^2m)$  führt
- **Malhotra, Kumar und Maheswari** fanden später einen Ansatz, den Fluss  $g$  in Zeit  $\mathcal{O}(n^2)$  zu berechnen, wodurch sich die Laufzeit auf  $\mathcal{O}(n^3)$  verbessern ließ

# Der Edmonds-Karp-Algorithmus

- Der Edmonds-Karp-Algorithmus ist eine spezielle Form von Ford-Fulkerson, die möglichst kurze Zunahmepfade benutzt
- Diese können mittels Breitensuche bestimmt werden

## Algorithmus Edmonds-Karp( $V, E, s, t, c$ )

---

```

1 for all  $(u, v) \in E \cup E^R$  do
2    $f(u, v) := 0$ 
3 while  $P := \text{zunahmepfad}(f) \neq \perp$  do
4    $\text{addierepfad}(f, P)$ 

```

---

## Prozedur $\text{addierepfad}(f, P)$

---

```

1 for all  $e \in P$  do
2    $f(e) := f(e) + c_f(P)$ 
3    $f(e^R) := f(e^R) - c_f(P)$ 

```

---

## Der Edmonds-Karp-Algorithmus

Prozedur  $\text{zunahmepfad}(f)$ 

```
1 for all  $v \in V$  do
2    $\text{parent}(v) := \perp$ 
3    $Q := (s)$ 
4 while  $Q \neq () \wedge \text{parent}(t) = \perp$  do
5    $u := \text{dequeue}(Q)$ 
6   for all  $e = (u, v) \in E \cup E^R$  do
7     if  $c(e) - f(e) > 0 \wedge \text{parent}(v) = \perp$  then
8        $c'(e) := c(e) - f(e)$ 
9        $\text{parent}(v) := u$ 
10       $\text{enqueue}(Q, v)$ 
11 if  $\text{parent}(t) = \perp$  then
12    $P := \perp$ 
13 else
14    $P := \text{parent-Pfad von } s \text{ nach } t$ 
15    $c_f(P) := \min\{c'(e) \mid e \in P\}$ 
16 return  $P$ 
```

# Der Edmonds-Karp-Algorithmus

- Die Prozedur  $\text{zunahmepfad}(f)$  berechnet im Restnetzwerk  $N_f$  einen (gerichteten)  $s$ - $t$ -Pfad  $P$  kürzester Länge, sofern ein  $s$ - $t$ -Pfad existiert
- Dies ist genau dann der Fall, wenn die while-Schleife mit  $\text{parent}(t) \neq \perp$  abbricht
- Der gefundene Zunahmepfad  $P = (u_\ell, \dots, u_0)$  lässt sich dann ausgehend von  $u_0 = t$  mittels  $\text{parent}$  zurückverfolgen:

$$u_i = \begin{cases} t, & i = 0, \\ \text{parent}(u_{i-1}), & i > 0 \text{ und } u_{i-1} \neq s \end{cases}$$

wobei  $\ell = \min\{i \geq 1 \mid u_i = s\}$  ist

- Dann ist  $u_\ell = s$  und  $P$  ein  $s$ - $t$ -Pfad, den wir als den **parent-Pfad** von  $s$  nach  $t$  bezeichnen

# Der Edmonds-Karp-Algorithmus

## Satz

Der Edmonds-Karp-Algorithmus durchläuft die while-Schleife höchstens  $(mn/2)$ -mal und hat somit eine Laufzeit von  $O(nm^2)$

## Beweis.

- Sei  $k$  die Anzahl der Schleifendurchläufe und seien  $P_1, \dots, P_k$  die Zunahmepfade, die der Algorithmus bei Eingabe  $N$  berechnet
- Es gilt also  $f_{i+1} = f_i + f_{P_{i+1}}$ , wobei  $f_0$  der triviale Nullfluss und  $P_{i+1}$  der im Restnetzwerk  $N_{f_i}$  berechnete Zunahmepfad ist
- Eine Kante  $e$  auf  $P_{i+1}$  heißt **kritisch** für  $P_{i+1}$ , falls der Fluss  $f_{P_{i+1}}$  in  $N_{f_i}$  die Kante  $e$  **sättigt**, d.h.  $f_{P_{i+1}}(e) = c_{f_i}(e)$
- Eine kritische Kante  $e$  für  $P_{i+1}$  ist wegen

$$c_{f_{i+1}}(e) = c(e) - f_{i+1}(e) = c(e) - (f_i + f_{P_{i+1}}) = c_{f_i}(e) - f_{P_{i+1}}(e) = 0$$

nicht in  $N_{f_{i+1}}$  enthalten, wohl aber die Kante  $e^R$ :

$$c_{f_{i+1}}(e^R) = c(e^R) - f_{i+1}(e^R) = c(e^R) + f_{i+1}(e) = c(e^R) + c(e) > 0$$

## Beweis (Fortsetzung).

- Sei  $d_i(u, v)$  die minimale Länge eines Pfades von  $u$  nach  $v$  im Restnetzwerk  $N_{f_i}$  und sei  $\ell_{i+1} = d_i(s, t)$  die Länge von  $P_{i+1}$
- Für den Rest des Beweises benötigen wir folgende drei Behauptungen

## Behauptung 1.

Für jeden Knoten  $u \in V$  gilt  $d_i(s, u) \leq d_{i+1}(s, u)$  und  $d_i(u, t) \leq d_{i+1}(u, t)$

Behauptung 2. Sei  $e = (u, v)$  eine Kante auf dem Pfad  $P_{i+1}$ .

Falls  $e^R$  für ein  $j > i$  auf dem Pfad  $P_{j+1}$  liegt, dann ist  $\ell_{j+1} \geq \ell_{i+1} + 2$

## Behauptung 3.

Seien  $P_{i_1}, \dots, P_{i_h}$  mit  $1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq k$  die Pfade, für die  $e$  oder  $e^R$  kritisch sind. Dann ist  $h \leq n/2$ .

# Der Edmonds-Karp-Algorithmus

## Behauptung 1.

Für jeden Knoten  $u \in V$  gilt  $d_i(s, u) \leq d_{i+1}(s, u)$  und  $d_i(u, t) \leq d_{i+1}(u, t)$

## Beweis von Behauptung 1.

- Hierzu beweisen wir für jeden kürzesten Pfad  $P = (u_0, \dots, u_\ell)$  von  $u_0 = s$  nach  $u_\ell = u$  in  $N_{f_{i+1}}$  (d.h.  $d_{i+1}(s, u) = \ell$ ) die Ungleichungen

$$d_i(s, u_h) \leq d_i(s, u_{h-1}) + 1 \text{ für } h = 1, \dots, \ell,$$

die  $d_i(s, u) \leq \ell$  implizieren

- Falls die Kante  $e = (u_{h-1}, u_h)$  in  $N_{f_i}$  enthalten ist, ist nichts zu zeigen
- Andernfalls muss  $f_{i+1}(e) \neq f_i(e)$  sein, d.h.  $e$  oder  $e^R$  liegen auf  $P_{i+1}$
- Da  $e$  nicht in  $N_{f_i}$  ist, muss  $e^R = (u_h, u_{h-1})$  auf  $P_{i+1}$  liegen
- Da  $P_{i+1}$  ein kürzester Pfad von  $s$  nach  $t$  in  $N_{f_i}$  ist, folgt  $d_i(s, u_{h-1}) = d_i(s, u_h) + 1$ , was  $d_i(s, u_h) = d_i(s, u_{h-1}) - 1 \leq d_i(s, u_{h-1}) + 1$  impliziert
- Vollkommen analog lässt sich  $d_i(u, t) \leq d_{i+1}(u, t)$  zeigen □

Behauptung 2. Sei  $e = (u, v)$  eine Kante auf dem Pfad  $P_{i+1}$ .

Falls  $e^R$  für ein  $j > i$  auf dem Pfad  $P_{j+1}$  liegt, dann ist  $l_{j+1} \geq l_{i+1} + 2$

Beweis von Behauptung 2.

- Da  $P_{i+1}$  ein kürzester  $s$ - $t$ -Pfad der Länge  $l_{i+1} = d_i(s, t)$  in  $N_{f_i}$  und  $P_{j+1}$  ein kürzester  $s$ - $t$ -Pfad der Länge  $l_{j+1} = d_j(s, t)$  in  $N_{f_j}$  ist, folgt dies direkt aus Behauptung 1:

$$d_j(s, t) = \underbrace{d_j(s, v)}_{\geq d_i(s, v)} + \underbrace{d_j(u, t)}_{\geq d_i(u, t)} + 1 \geq \underbrace{d_i(s, v)}_{d_i(s, u) + 1} + \underbrace{d_i(u, t)}_{d_i(v, t) + 1} + 1 = d_i(s, t) + 2 \quad \square$$

# Der Edmonds-Karp-Algorithmus

## Behauptung 3.

Seien  $P_{i_1}, \dots, P_{i_h}$  mit  $1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq k$  die Pfade, für die  $e$  oder  $e^R$  kritisch sind. Dann ist  $h \leq n/2$ .

## Beweis von Behauptung 3.

- Wir zeigen zuerst, dass  $\ell_{i_{j+1}} \geq \ell_{i_j} + 2$  für  $j = 1, \dots, h - 1$  gilt
- Falls  $e' \in \{e, e^R\}$  für ein  $j \in \{1, \dots, h - 1\}$  kritisch für den Pfad  $P_{i_j}$  ist, dann fehlt  $e'$  im Restnetzwerk  $N_{f_{i_j}}$
- Daher kann  $e'$  nur dann eine kritische Kante für den Pfad  $P_{i_{j+1}}$  sein, wenn  $e'^R$  auf einem Pfad  $P_i$  mit  $i_j < i \leq i_{j+1}$  liegt
- Dies gilt natürlich erst recht, wenn die Kante  $e'^R$  für  $P_{i_{j+1}}$  kritisch ist
- Mit Behauptung 1 und Behauptung 2 folgt also  $\ell_{i_{j+1}} \geq \ell_i \geq \ell_{i_j} + 2$
- Daher ist

$$n - 1 \geq \ell_{i_h} \geq \ell_{i_1} + 2(h - 1) \geq 1 + 2(h - 1) = 2h - 1,$$

was  $h \leq n/2$  impliziert



## Beweis des Satzes (Schluss)

- Nach Behauptung 3 sind  $e$  und  $e^R$  für jede Kante  $e \in E$  zusammen höchstens auf  $n/2$  vielen Pfaden  $P_i$  kritisch
- Da  $E \cup E^R$  höchstens  $m$  Kantenpaare der Form  $\{e, e^R\}$  enthält, können die  $k$  Pfade  $P_1, \dots, P_k$  höchstens  $mn/2$  kritische Kanten enthalten
- Da aber auf jedem Pfad  $P_i$  mindestens eine Kante kritisch ist, muss  $k \leq mn/2$  sein □

Man beachte, dass der Beweis auch bei Netzwerken mit reellen Kapazitäten seine Gültigkeit behält

- In den Übungen wird gezeigt, dass sich in jedem Netzwerk  $N$  ein maximaler Fluss durch Addition von höchstens  $m$  Zunahmepfaden konstruieren lässt
- Es ist aber nicht bekannt, ob sich solche Pfade in Zeit  $O(m)$  bestimmen lassen
- Wenn ja, würde dies auf eine Gesamtlaufzeit von  $O(m^2)$  führen
- Für dichte Netzwerke (d.h.  $m = \Theta(n^2)$ ) hat der Algorithmus von Dinitz die gleiche Laufzeit  $O(n^2 m) = O(n^4)$  und die verbesserte Version ist mit  $O(n^3)$  in diesem Fall sogar noch schneller

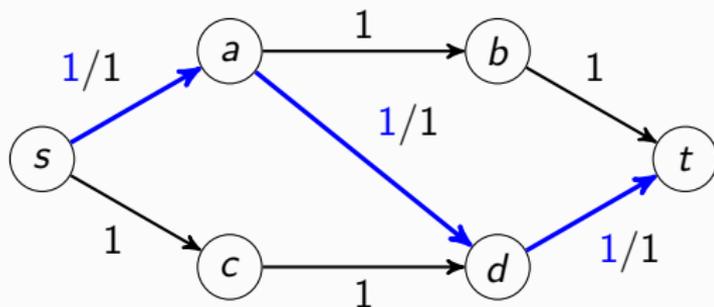
## Der Algorithmus von Dinitz

- Die Analyse der Laufzeit des Edmonds-Karp-Algorithmus benutzt die Tatsache, dass der Fluss durch den Zunahmepfad  $P_{i+1}$ , der in jedem Schleifendurchlauf auf den aktuellen Fluss  $f_i$  addiert wird, eine Kante auf *mindestens einem* kürzesten Pfad im Restnetzwerk  $N_{f_i}$  sättigt
- Dies hat zur Folge, dass nicht mehr als  $mn/2$  Zunahmepfade  $P_i$  benötigt werden, um einen maximalen Fluss zu erhalten
- Dagegen addiert der Algorithmus von Dinitz in jedem Schleifendurchlauf auf den aktuellen Fluss  $f$  einen Fluss  $g$ , der auf *jedem* kürzesten Pfad im Restnetzwerk  $N_f$  mindestens eine Kante sättigt
- Wir werden sehen, dass maximal  $n - 1$  solche Flüsse  $g_i$  benötigt werden

### Definition

- Ein Fluss  $g$  in einem Netzwerk  $N = (V, E, s, t, c)$  **sättigt** eine Kante  $e \in E$ , falls  $g(e) = c(e)$  ist
- $g$  heißt **blockierend**, falls  $g$  mindestens eine Kante auf jedem Pfad  $P$  von  $s$  nach  $t$  sättigt

- Nach dem Max-Flow-Min-Cut-Theorem gibt es zu jedem maximalen Fluss  $f$  einen  $s$ - $t$ -Schnitt  $S$ , so dass alle Kanten in  $E(S)$  gesättigt sind
- Da jeder Pfad von  $s$  nach  $t$  mindestens eine Kante in  $E(S)$  enthalten muss, ist jeder maximale Fluss auch blockierend
- Für die Umkehrung gibt es jedoch einfache Gegenbeispiele, wie etwa



- Ein blockierender Fluss muss also nicht unbedingt maximal sein
- Tatsächlich ist  $g$  genau dann ein blockierender Fluss in  $N$ , wenn es im Restnetzwerk  $N_g$  keinen Zunahmepfad gibt, der nur aus *Vorwärtskanten*  $e \in E$  mit  $g(e) < c(e)$  besteht

- Der Algorithmus von Diniz berechnet anstelle eines kürzesten Zunahmepfades  $P$  im aktuellen Restnetzwerk  $N_f$  einen blockierenden Fluss  $g$  im Schichtnetzwerk  $N'_f$
- Dieses enthält nur diejenigen Kanten von  $N_f$ , die auf einem kürzesten Pfad mit Startknoten  $s$  liegen
- Zudem werden aus  $N'_f$  alle Knoten  $u \neq t$  entfernt, die einen Abstand  $d(s, u) \geq d(s, t)$  in  $N_f$  haben
- Der Name rührt daher, dass jeder Knoten in  $N'_f$  einer Schicht  $S_j$  zugeordnet wird

## Definition

- Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk und bezeichne  $d(x, y)$  die Länge eines kürzesten Pfades von  $x$  nach  $y$  in  $N$
- Das zugeordnete **Schichtnetzwerk** ist  $N' = (V', E', s, t, c')$  mit
  - der Knotenmenge  $V' = S_0 \cup \dots \cup S_\ell$
  - der Kantenmenge  $E' = \bigcup_{j=1}^{\ell} \{(u, v) \in E \mid u \in S_{j-1} \wedge v \in S_j\}$  und
  - der Kapazitätsfunktion

$$c'(e) = \begin{cases} c(e), & e \in E', \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei

$$S_j = \begin{cases} \{u \in V \mid d(s, u) = j\}, & 0 \leq j \leq \ell - 1 \\ \{t\}, & j = \ell \end{cases}$$

und  $\ell = 1 + \max\{d(s, u) < d(s, t) \mid u \in V\}$  ist

**Algorithmus** Dinitz( $N$ ),  $N = (V, E, s, t, c)$ 

```
1 for all  $(u, v) \in E \cup E^R$  do  
2    $f(u, v) := 0$   
3 while  $S := \text{schichtnetzwerk}(N, f) \neq \perp$  do  
4    $f := f + \text{blockfluss}(S)$ 
```

- Das zum Restnetzwerk  $N_f = (V, E_f, s, t, c_f)$  gehörige Schichtnetzwerk  $N'_f = (V', E'_f, s, t, c'_f)$  wird von der Prozedur  $\text{schichtnetzwerk}(N, f)$  in Zeit  $O(n + m)$  berechnet
- Für die Berechnung eines blockierenden Flusses  $g$  in einem Schichtnetzwerk  $S$  werden wir zwei Algorithmen betrachten
- Eine Prozedur  $\text{blockfluss1}$ , deren Laufzeit durch  $O(mn)$  und eine Prozedur  $\text{blockfluss2}$ , deren Laufzeit durch  $O(n^2)$  beschränkt ist
- Wir beschreiben zuerst die Prozedur  $\text{schichtnetzwerk}$

- Diese führt in  $N_f$  eine modifizierte Breitensuche mit Startknoten  $s$  durch und speichert dabei in der Menge  $E'$  nicht nur alle Baumkanten, sondern zusätzlich alle **Querkanten**  $(u, v)$  (d.h.  $u$  und  $v$  liegen nicht auf einem gemeinsamen parent-Pfad), die auf einem kürzesten Weg von  $s$  zu  $v$  liegen
- Die Suche bricht ab, sobald  $t$  am Kopf der Schlange erscheint oder alle von  $s$  aus erreichbaren Knoten abgearbeitet sind
- Falls  $t$  erreicht wird, werden außer der Senke  $t$  alle Knoten  $u$ , die in  $N_f$  einen Abstand  $d(s, u) < d(s, t)$  von der Quelle  $s$  haben, in der Menge  $V'$  zusammengefasst
- Zudem werden alle Kanten aus  $E'$  wieder entfernt, die nicht zwischen zwei Knoten aus  $V'$  verlaufen
- Wird  $t$  dagegen nicht erreicht, so existiert in  $N_f$  (und damit in  $N'_f$ ) kein (blockierender) Fluss  $g$  mit  $|g| > 0$  und somit auch kein Zunahmepfad in  $N_f$ , d.h.  $f$  ist bereits maximal

## Prozedur schichtnetzwerk( $N, f$ )

```
1  $E' := \emptyset$ 
2 for all  $v \in V$  do  $niv(v) := n$ 
3  $niv(s) := 0$ ;  $Q := (s)$ 
4 while  $Q \neq () \wedge \text{head}(Q) \neq t$  do
5    $u := \text{dequeue}(Q)$ 
6   for all  $e = (u, v) \in E \cup E^R$  do
7     if  $c(e) - f(e) > 0 \wedge niv(v) > niv(u)$  then
8        $E' := E' \cup \{e\}$ 
9        $c'(e) := c(e) - f(e)$ 
10      if  $niv(v) > niv(u) + 1$  then
11         $niv(v) := niv(u) + 1$ 
12         $\text{enqueue}(Q, v)$ 
13 if  $\text{head}(Q) = t$  then
14    $V' := \{v \in V \mid niv(v) < niv(t)\} \cup \{t\}$ 
15    $E' := E' \cap (V' \times V')$ 
16   return  $(V', E', s, t, c')$ 
17 else return  $\perp$ 
```

## Der Algorithmus von Dinitz

- Die Laufzeitschranke  $O(n + m)$  für die Prozedur `schichtnetzwerk` folgt aus der Tatsache, dass jede Kante in  $E \cup E^R$  höchstens einmal besucht wird und jeder Besuch mit einem konstanten Zeitaufwand verbunden ist
- Nun kommen wir zur Prozedur `blockfluss1`, die einen blockierenden Fluss  $g$  in einem Schichtnetzwerk  $S = (V, E, s, t, c)$  berechnet
- Beginnend mit dem Nullfluss  $g$  bestimmt diese in der `repeat`-Schleife
  - mittels Tiefensuche einen  $s$ - $t$ -Pfad  $P$  in  $S$
  - addiert den Fluss  $f_P$  durch  $P$  in  $S$  zum aktuellen Fluss  $g$  hinzu
  - aktualisiert die Kapazitäten aller Kanten  $e$  auf dem Pfad  $P$  und
  - entfernt aus  $S$  die von  $g$  gesättigten Kanten
- Der gefundene Pfad  $P$  lässt sich hierbei direkt aus dem Inhalt des Kellers  $K$  rekonstruieren, weshalb wir ihn als  **$K$ -Pfad** bezeichnen
- Man beachte, dass die Kapazitäten der auf  $P$  liegenden Kanten nur in Vorwärtsrichtung und nicht wie bei Ford-Fulkerson und Edmonds-Karp auch in Rückwärtsrichtung angepasst werden

- Falls die Tiefensuche in einem Knoten  $u \neq s$  in einer Sackgasse endet (weil  $E$  keine von  $u$  aus weiterführenden Kanten enthält), wird die zuletzt besuchte Kante  $(u', u)$  ebenfalls aus  $E$  entfernt und die Tiefensuche vom Startpunkt  $u'$  dieser Kante fortgesetzt (backtracking)
- Die Prozedur `blockfluss1` bricht ab, sobald alle Kanten mit Startknoten  $s$  aus  $E$  entfernt wurden und somit in  $(V, E)$  keine Pfade mehr von  $s$  nach  $t$  existieren (d.h.  $g$  ist ein blockierender Fluss in  $S$ )
- Die Laufzeitschranke  $O(mn)$  für `blockfluss1` folgt aus der Tatsache, dass sich die Anzahl der aus  $E$  entfernten Kanten nach spätestens  $n$  Schleifendurchläufen um 1 erhöht

**Prozedur** blockfluss1( $S$ ),  $S = (V, E, s, t, c)$ 

```
1 for all  $e \in E \cup E^R$  do  $g(e) := 0$ 
2  $u := s$ ;  $K := (s)$ ; done := false
3 repeat
4   if  $\exists e = (u, v) \in E$  then
5     push( $K, v$ );  $u := v$ 
6   elseif  $u = t$  then
7      $P := K$ -Pfad von  $s$  nach  $t$ 
8      $c(P) := \min\{c(e) \mid e \in P\}$ 
9     for all  $e \in P$  do
10       $g(e) := g(e) + c(P)$ ;  $g(e^R) := -g(e)$ ;  $c(e) := c(e) - c(P)$ 
11      if  $c(e) = 0$  then  $E := E \setminus \{e\}$ 
12       $K := (s)$ ;  $u := s$ 
13   elseif  $u \neq s$  then \ \ backtracking
14     pop( $K$ );  $u' := \text{top}(K)$ ;  $E := E \setminus \{(u', u)\}$ ;  $u := u'$ 
15   else done := true
16 until done
17 return  $g$ 
```

## Satz

Der Algorithmus von Dinitz durchläuft die while-Schleife höchstens  $(n - 1)$ -mal

## Beweis.

- Sei  $f_0$  der Nullfluss in  $N$  und seien  $g_1, \dots, g_k$  die blockierenden Flüsse, die der Dinitz-Algorithmus der Reihe nach berechnet, d.h.  
$$f_{i+1} = f_i + g_{i+1}$$
- Zudem sei  $d_i(u, v)$  die minimale Länge eines Pfades von  $u$  nach  $v$  im Restnetzwerk  $N_{f_i}$  und sei  $\delta_i = d_i(s, t)$
- Wir zeigen, dass  $\delta_i < \delta_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, k - 1$  gilt
- Da  $\delta_1 \geq 1$  und  $\delta_k \leq n - 1$  ist, folgt  $k \leq n - 1$

## Beweis (Fortsetzung).

- Sei  $P = (u_0, \dots, u_\ell)$  ein kürzester Pfad von  $u_0 = s$  nach  $u_\ell = u$  in  $N_{f_{i+1}}$  (d.h. es gilt  $d_{i+1}(s, u_h) = h$  für  $h = 1, \dots, \ell$ )
- Wir beweisen für  $h = 1, \dots, \ell$  die folgenden (Un)gleichungen:

$$d_i(s, u_h) \leq d_i(s, u_{h-1}) + 1, \text{ falls } (u_{h-1}, u_h) \in E_{f_i} \quad (1)$$

$$d_i(s, u_h) = d_i(s, u_{h-1}) - 1, \text{ falls } (u_{h-1}, u_h) \notin E_{f_i} \quad (2)$$

- Es ist klar, dass (1) gilt
- Falls die Kante  $e = (u_{h-1}, u_h)$  nicht in  $N_{f_i}$  (aber in  $N_{f_{i+1}}$ ) enthalten ist, muss  $f_{i+1}(e) \neq f_i(e)$  und somit  $g_{i+1}(e) \neq 0$  sein
- Da  $e$  dann auch nicht in  $N'_{f_i}$  ist, muss  $e^R = (u_h, u_{h-1})$  in  $N'_{f_i}$  sein
- Da  $N'_{f_i}$  nur Kanten auf kürzesten Pfaden mit Startknoten  $s$  enthält, folgt  $d_i(s, u_{h-1}) = d_i(s, u_h) + 1$ , was (2) impliziert

## Beweis (Fortsetzung).

- Aus (1 + 2) folgt

$$d_i(s, u_\ell) \leq d_i(s, u_{\ell-1}) + 1 \leq \dots \leq d_i(s, s) + \ell = \ell = d_{i+1}(s, u_\ell)$$

- Somit haben wir folgende Ungleichung bewiesen:

$$\text{Für jeden Knoten } u \in V \text{ gilt } d_i(s, u) \leq d_{i+1}(s, u) \quad (3)$$

- Nun zeigen wir  $\delta_i < \delta_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, k - 1$
- Sei  $P = (u_0, u_1, \dots, u_{\delta_{i+1}})$  ein kürzester Pfad von  $s = u_0$  nach  $t = u_{\delta_{i+1}}$  in  $N_{f_{i+1}}$  (und somit auch in  $N'_{f_{i+1}}$ )
- Mit Ungleichung 3 folgt, dass  $d_i(s, u_h) \leq d_{i+1}(s, u_h) = h$  für  $h = 0, \dots, \delta_{i+1}$  ist
- Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
  - Alle Knoten  $u_h$  sind in  $N'_i$  enthalten
  - Mindestens ein Knoten  $u_h$  ist nicht in  $N'_i$  enthalten

## Beweis (Fortsetzung).

- Alle Knoten  $u_h$  sind in  $N'_{f_i}$  enthalten
  - In diesem Fall muss ein  $h$  mit  $d_i(s, u_h) \leq d_i(s, u_{h-1})$  existieren
  - Würde nämlich  $d_i(s, u_h) > d_i(s, u_{h-1})$  für  $h = 1, \dots, \delta_{i+1} - 1$  gelten, so wären die Kanten  $(u_{h-1}, u_h)$  für  $h = 1, \dots, \delta_{i+1} - 1$  wegen (2) in  $N_{f_i}$  enthalten und somit würde wegen (1)  $d_i(s, u_h) = d_i(s, u_{h-1}) + 1$  für  $h = 1, \dots, \delta_{i+1} - 1$  folgen
  - Dies hätte wiederum zur Folge, dass  $P$  ein kürzester Pfad von  $s$  nach  $t$  in  $N_{f_i}$  und somit ein  $s$ - $t$ -Pfad in  $N'_{f_i}$  wäre, der von  $g_i$  nicht blockiert wird, da er auch in  $N_{f_{i+1}}$  existiert
  - Da aber  $g_i$  jeden  $s$ - $t$ -Pfad in  $N'_{f_i}$  blockiert, muss also ein  $h$  mit  $d_i(s, u_h) \leq d_i(s, u_{h-1})$  existieren und es folgt mit (1 + 2):

$$\delta_i = d_i(s, t) \leq d_i(s, u_h) + \underbrace{d_i(u_h, t)}_{\leq \delta_{i+1} - h} \leq \underbrace{d_i(s, u_{h-1})}_{\leq d_{i+1}(s, u_{h-1}) = h - 1} + \delta_{i+1} - h < \delta_{i+1}$$

## Beweis (Schluss)

- Mindestens ein Knoten  $u_h$  ist nicht in  $N'_{f_i}$  enthalten
  - Sei  $u_h$  der erste solche Knoten auf  $P$  und sei  $e = (u_{h-1}, u_h)$
  - Da  $u_h \neq t = u_{\delta_{i+1}}$  ist, folgt  $d_{i+1}(s, u_h) < d_{i+1}(s, t) = \delta_{i+1}$
  - Zudem liegt die Kante  $e$  nicht nur in  $N_{f_{i+1}}$ , sondern wegen  $f_{i+1}(e) = f_i(e)$  (da weder  $e$  noch  $e^R$  zu  $N'_{f_i}$  gehören) auch in  $N_{f_i}$
  - Da somit  $u_{h-1}$  in  $N'_{f_i}$  und  $e$  in  $N_{f_i}$  ist, kann  $u_h$  nur aus dem Grund nicht zu  $N'_{f_i}$  gehören, dass  $d_i(s, u_h) = d_i(s, t)$  ist
  - Daher folgt unter Verwendung von (1 + 2 + 3) auch in diesem Fall die Ungleichung  $\delta_i < \delta_{i+1}$ :

$$\delta_i = d_i(s, t) = d_i(s, u_h) \leq \underbrace{d_i(s, u_{h-1})}_{\leq d_{i+1}(s, u_{h-1})} + 1 \leq d_{i+1}(s, u_h) < \delta_{i+1} \quad \square$$

## Korollar

Der Algorithmus von Dinitz berechnet bei Verwendung der Prozedur `blockfluss1` einen maximalen Fluss in Zeit  $O(n^2 m)$

## Der Algorithmus von Dinitz

- Wir betrachten nun die Prozedur `blockfluss2`
- Zu ihrer Beschreibung benötigen wir folgende Notation

**Definition** Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk.

- Der **Durchsatz eines Knotens**  $u \in V$  in  $N$  ist

$$D(u) = \begin{cases} c^+(u), & u = s \\ c^-(u), & u = t \\ \min\{c^+(u), c^-(u)\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei  $c^+(u) = \sum_{v \in V} c(u, v)$  die **Ausgangskapazität** und  $c^-(u) = \sum_{v \in V} c(v, u)$  die **Eingangskapazität von  $u$**  in  $N$  ist

- Ein Fluss  $g$  in  $N$  **sättigt einen Knoten**  $u \in V$  in  $N$ , falls
  - $u = s$  ist und  $g$  alle Kanten  $(s, v) \in E$  mit Startknoten  $s$  sättigt
  - oder  $u = t$  ist und  $g$  alle Kanten  $(v, t) \in E$  mit Zielknoten  $t$  sättigt
  - oder  $u \in V - \{s, t\}$  ist und  $g$  alle Kanten  $(u, v) \in E$  mit Startknoten  $u$  oder alle Kanten  $(v, u) \in E$  mit Zielknoten  $u$  sättigt

Die Korrektheit von `blockfluss2` basiert auf folgender Implikation

## Proposition

Ein Fluss  $g$  in einem Netzwerk  $N$  ist  $g$  blockierend, wenn er auf jedem  $s$ - $t$ -Pfad mindestens einen Knoten  $u$  sättigt

## Beweis.

Falls  $g$  mindestens einen Knoten  $u$  auf einem  $s$ - $t$ -Pfad  $P$  sättigt, dann sättigt  $g$  auch mindestens eine Kante auf dem Pfad  $P$  □

- Beginnend mit dem trivialen Fluss  $g = 0$  berechnet die Prozedur `blockfluss2` für jeden Knoten  $u$  den Durchsatz  $D(u)$  im Schichtnetzwerk  $S = (V, E, s, t, c)$  und wählt in jedem Durchlauf der `repeat`-Schleife einen Knoten  $u$  mit minimalem Durchsatz
- Dann benutzt sie die Prozeduren `propagierevor` und `propagierererück`, um den aktuellen Fluss  $g$  um den Wert  $D(u)$  zu erhöhen und die Restkapazitäten der betroffenen Kanten sowie die Durchsatzwerte  $D(v)$  der betroffenen Knoten zu aktualisieren
- Anschließend werden alle gesättigten Knoten aus  $V$  und alle gesättigten Kanten aus  $E$  entfernt
- Hierzu werden in der Menge  $B$  alle Knoten gespeichert, sobald deren Durchsatz durch die vorgenommenen Erhöhungen von  $g$  auf 0 sinkt

**Prozedur** blockfluss2( $S$ ),  $S = (V, E, s, t, c)$ 

```
1 for all  $e \in E \cup E^R$  do  $g(e) := 0$ 
2 for all  $u \in V$  do
3    $c^+(u) := \sum_{(u,v) \in E} c(u,v)$ ;  $c^-(u) := \sum_{(v,u) \in E} c(v,u)$ 
4 repeat
5   wähle  $u \in V$  mit  $D(u)$  minimal
6    $B := \{u\}$ ; propagierevor( $u$ ); propagiererrück( $u$ )
7   while  $\exists v \in B \setminus \{s, t\}$  do
8      $B := B \setminus \{v\}$ ;  $V := V \setminus \{v\}$ 
9     for all  $e = (v, w) \in E$  do
10       $E := E \setminus \{e\}$ ;  $c^-(w) := c^-(w) - c(v, w)$ 
11      if  $c^-(w) = 0$  then  $B := B \cup \{w\}$ 
12      for all  $e = (w, v) \in E$  do
13         $E := E \setminus \{e\}$ ;  $c^+(w) := c^+(w) - c(w, v)$ 
14        if  $c^+(w) = 0$  then  $B := B \cup \{w\}$ 
15 until  $u \in \{s, t\}$ 
16 return  $g$ 
```

## Der Algorithmus von Dinitz

- Die Prozedur `blockfluss2` sättigt in jedem Durchlauf der `repeat`-Schleife mindestens einen Knoten  $u$  und entfernt ihn aus  $V$
- Daher wird nach höchstens  $n - 1$  Iterationen einer der beiden Knoten  $s$  oder  $t$  als Knoten  $u$  mit minimalem Durchsatz  $D(u)$  gewählt und die `repeat`-Schleife verlassen
- Da nach der letzten Iteration der Durchsatz von  $s$  oder von  $t$  gleich Null ist, wird einer dieser beiden Knoten zu diesem Zeitpunkt von  $g$  gesättigt, d.h.  $g$  ist nach obiger Proposition ein blockierender Fluss
- Die Prozeduren `propagierevor` und `propagierererück` propagieren den Fluss durch  $u$  in Vorwärtsrichtung hin zu  $t$  bzw. in Rückwärtsrichtung hin zu  $s$
- Dies geschieht in Form einer Breitensuche mit Startknoten  $u$  unter Benutzung der Kanten in  $E$  bzw.  $E^R$
- Da der Durchsatz  $D(u)$  von  $u$  unter allen Knoten minimal ist, ist sichergestellt, dass der Durchsatz  $D(v)$  jedes Knotens  $v$  ausreicht, um den für ihn ermittelten Zusatzfluss in Höhe von  $z(v)$  weiterzuleiten

**Prozedur** propagierevor( $u$ )

---

```
1 for all  $v \in V$  do  $z(v) := 0$ 
2  $z(u) := D(u)$ 
3  $Q := (u); R := \{u\}$ 
4 while  $Q \neq ()$  do
5    $v := \text{dequeue}(Q)$ 
6   while  $z(v) \neq 0 \wedge \exists e = (v, w) \in E$  do
7     if  $w \notin R$  then  $\text{enqueue}(Q, w)$ 
8      $R := R \cup \{w\}$ 
9      $m := \min\{z(v), c(e)\}; z(v) := z(v) - m; z(w) := z(w) + m$ 
10     $\text{aktualisiererekante}(e, m)$ 
```

---

- Die Prozedur propagiererrück unterscheidet sich von der Prozedur propagierevor nur dadurch, dass in Zeile 6 die Bedingung  $\exists e = (v, w) \in E$  durch die Bedingung  $\exists e = (w, v) \in E$  ersetzt wird

**Prozedur** aktualisiererekante( $e, m$ ),  $e = (v, w)$ 

---

```
1  $g(e) := g(e) + m$ 
2  $c(e) := c(e) - m$ 
3 if  $c(e) = 0$  then  $E := E \setminus \{e\}$ 
4  $c^+(v) := c^+(v) - m$ 
5 if  $c^+(v) = 0$  then  $B := B \cup \{v\}$ 
6  $c^-(w) := c^-(w) - m$ 
7 if  $c^-(w) = 0$  then  $B := B \cup \{w\}$ 
```

---

- Da die repeat-Schleife von blockfluss2 maximal  $(n - 1)$ -mal durchlaufen wird, werden die Prozeduren propagierevor und propagiererück höchstens  $(n - 1)$ -mal aufgerufen
- Sei  $a$  die Gesamtzahl der Durchläufe der inneren while-Schleife von propagierevor, summiert über alle Aufrufe

- Dann gilt  $a \leq m + n^2$ , da in jedem Durchlauf der inneren while-Schleife
  - eine Kante aus  $E$  entfernt wird (falls in Zeile 9  $m = c(v, u)$  ist), was pro Kante höchstens einmal vorkommt
  - oder der zu propagierende Fluss  $z(v)$  durch einen Knoten  $v$  auf Null sinkt (falls in Zeile 9  $m = z(v)$  ist), was pro Aufruf und pro Knoten höchstens einmal vorkommt
- Der gesamte Zeitaufwand ist daher  $O(n^2 + m)$  innerhalb der beiden while-Schleifen und  $O(n^2)$  außerhalb
- Die gleichen Schranken gelten für propagiererrück und eine ähnliche Überlegung zeigt, dass die while-Schleife von `blockfluss2` einen Gesamtaufwand von  $O(n + m)$  hat
- Folglich ist die Laufzeit von `blockfluss2`  $O(n^2)$

## Korollar

Der Algorithmus von Dinitz berechnet bei Verwendung der Prozedur `blockfluss2` einen maximalen Fluss in Zeit  $O(n^3)$

- Auf Netzwerken, deren Flüsse durch jede Kante oder durch jeden Knoten durch eine relativ kleine Zahl  $C$  beschränkt sind, lassen sich noch bessere Laufzeitschranken für den Dinitz-Algorithmus nachweisen
- Hierzu benötigen wir folgende Beziehungen zwischen einem Netzwerk  $N$  und seinen Restnetzwerken  $N_f$

## Lemma

Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk,  $f$  ein Fluss in  $N$  und  $h : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}$

- Ⓐ Die Funktion  $h$  ist genau dann ein Fluss (bzw. maximaler Fluss) in  $N_f$ , wenn  $f + h$  ein Fluss (bzw. maximaler Fluss) in  $N$  ist
- Ⓑ Für jede Kante  $e \in E \cup E^R$  gilt  $c_f(e) + c_f(e^R) = c(e) + c(e^R)$
- Ⓒ Für alle Knoten  $u \in V \setminus \{s, t\}$  gilt  $c_f^+(u) = c^+(u)$  und  $c_f^-(u) = c^-(u)$  und somit  $D_f(u) = D(u)$ , wobei  $D_f(u)$  der Durchsatz von  $u$  in  $N_f$  ist

# Der Algorithmus von Dinitz

- Ⓐ Die Funktion  $h$  ist genau dann ein Fluss (bzw. maximaler Fluss) in  $N_f$ , wenn  $f + h$  ein Fluss (bzw. maximaler Fluss) in  $N$  ist

## Beweis.

- Da  $f$  die Antisymmetrie und die Kontinuität erfüllt, übertragen sich diese Eigenschaften von  $h$  auf  $f + h$  und umgekehrt
- Weiter erfüllt  $h$  wegen

$$h(e) \leq \underbrace{c_f(e)}_{c(e) - f(e)} \Leftrightarrow f(e) + h(e) \leq c(e),$$

genau dann die Kapazitätsbedingung in  $N_f$ , wenn  $f + h$  sie in  $N$  erfüllt

- $h$  ist genau dann maximal in  $N_f$ , wenn  $g = f + h$  maximal in  $N$  ist, da
  - jeder Fluss  $h'$  in  $N_f$  mit  $|h'| > |h|$  einen Fluss  $g' = f + h'$  der Größe  $|g'| = |f + h'| > |f + h| = |g|$  in  $N$
  - und jeder Fluss  $g'$  in  $N$  mit  $|g'| > |g|$  einen Fluss  $h' = g' - f$  der Größe  $|h'| = |g' - f| > |g| - |f| = |f + h| - |f| = |h|$  in  $N_f$

liefern würde

# Der Algorithmus von Dinitz

• Für jede Kante  $e \in E \cup E^R$  gilt  $c_f(e) + c_f(e^R) = c(e) + c(e^R)$

**Beweis.**

$$\text{Es gilt } \underbrace{c_f(e)}_{c(e)-f(e)} + \underbrace{c_f(e^R)}_{c(e^R)-f(e^R)} = c(e) + c(e^R) - \underbrace{[f(e) + f(e^R)]}_{=f(e)-f(e)=0}$$

• Für alle Knoten  $u \in V \setminus \{s, t\}$  gilt  $c_f^+(u) = c^+(u)$  und  $c_f^-(u) = c^-(u)$  und somit  $D_f(u) = D(u)$

**Beweis.**

• Für alle Knoten  $u \in V \setminus \{s, t\}$  gilt

$$c_f^+(u) = \sum_{v \in V} \underbrace{c_f(u, v)}_{c(u, v) - f(u, v)} = \underbrace{\sum_{v \in V} c(u, v)}_{c^+(u)} - \underbrace{\sum_{v \in V} f(u, v)}_{=0}$$

• Die Gleichheit  $c_f^-(u) = c^-(u)$  folgt analog



## Lemma

Sei  $F > 0$  die maximale Flussgröße in einem Netzwerk  $N$  und sei  $\ell$  die Länge des zu  $N$  gehörigen Schichtnetzwerks  $N'$

- Ⓓ Falls jeder Knoten  $u \in V \setminus \{s, t\}$  einen Durchsatz  $D(u) \leq C$  in  $N$  hat, gilt  $\ell \leq 1 + (n - 2)C/F$
- Ⓔ Falls jede Kante  $e \in E$  eine Kapazität  $c(e) \leq C$  hat, gilt  $\ell \leq \min \left\{ mC/F, 2n\sqrt{C/F} \right\}$

**Beweis.** Sei  $f$  ein Fluss der Größe  $F$  in  $N$

- Ⓓ Da  $f$  für  $j = 1, \dots, \ell - 1$  durch die  $n_j$  Knoten der Schicht  $S_j$  von  $N'$  fließt, von denen jeder einen Durchsatz  $\leq C$  hat, folgt

$$F \leq n_j C \text{ bzw. } F/C \leq n_j$$

Also ist  $n - 2 \geq \sum_{j=1}^{\ell-1} n_j \geq (\ell - 1)F/C$  bzw.  $\ell \leq 1 + (n - 2)C/F$

# Der Algorithmus von Dinitz

- Ⓔ Falls jede Kante  $e \in E$  eine Kapazität  $c(e) \leq C$  hat, gilt  
 $\ell \leq \min\{mC/F, 2n\sqrt{C/F}\}$

## Beweis.

- Für  $j = 1, \dots, \ell - 1$  sei  $E_j$  die Menge der Kanten von Schicht  $S_{j-1}$  nach Schicht  $S_j$  und sei  $E_\ell$  die Menge der Kanten von  $S_{\ell-1}$  nach  $S_\ell := V - \bigcup_{j=0}^{\ell-1} S_j$  in  $N$
- Da der Fluss  $f$  für  $j = 1, \dots, \ell$  durch die  $m_j$  Kanten in  $E_j$  fließt, die alle eine Kapazität  $\leq C$  haben, muss

$$F \leq m_j C \leq C |S_{j-1}| |S_j| \text{ bzw. } F/C \leq m_j \leq |S_{j-1}| |S_j|$$

sein, woraus sofort  $m \geq \sum_{j=1}^{\ell} m_j \geq \ell F/C$  bzw.  $\ell \leq mC/F$  folgt

- Wegen  $F/C \leq |S_{j-1}| |S_j|$  muss zudem  $S_{j-1}$  oder  $S_j$  mindestens  $\sqrt{F/C}$  Knoten enthalten und es folgt

$$(\ell/2)\sqrt{F/C} \leq |S_0| + \dots + |S_\ell| = n \text{ bzw. } \ell \leq 2n\sqrt{C/F}$$

□

# Der Algorithmus von Dinitz

## Satz

Sei  $k$  die Anzahl der Schleifendurchläufe des Algorithmus von Dinitz bei Eingabe eines Netzwerks  $N = (V, E, s, t, c)$ .

- 1 Falls jeder Knoten  $u \in V \setminus \{s, t\}$  einen Durchsatz  $D(u) \leq C$  hat, so gilt  $k \leq 1 + 2\sqrt{nC}$
- 2 Falls jede Kante  $e \in E$  eine Kapazität  $c(e) \leq C$  hat, so gilt  $k \leq \min \{8(mC)^{1/2}, 4(n^2C)^{1/3}\}$

## Beweis.

- Sei  $F = |f|$  die Größe eines maximalen Flusses  $f$  in  $N$  und seien  $g_1, \dots, g_k$  die blockierenden Flüsse, die der Dinitz-Algorithmus der Reihe nach in den Schichtnetzwerken  $N'_{f_0}, \dots, N'_{f_{k-1}}$  berechnet
- $f_0$  ist also der Nullfluss in  $N$  und  $f_{i+1} = f_i + g_{i+1}$  für  $i = 0, \dots, k-1$

# Der Algorithmus von Dinitz

- ① Falls jeder Knoten  $u \in V \setminus \{s, t\}$  einen Durchsatz  $D(u) \leq C$  hat, so gilt  $k \leq 1 + 2\sqrt{nC}$

## Beweis.

- Da die Anzahl  $k$  der Schleifendurchläufe  $\leq F$  ist, müssen wir nur den Fall  $F > \sqrt{nC}$  betrachten
- Wir schätzen zuerst die Längen  $\ell_i$  der Schichtnetzwerke  $N'_{f_i}$  ab
- Da  $f - f_i$  nach ① ein maximaler Fluss in  $N_{f_i}$  der Größe  $R_i = F - |f_i|$  ist und nach ③ jeder Knoten  $u \in V \setminus \{s, t\}$  in  $N_{f_i}$  den gleichen Durchsatz wie in  $N$  hat, folgt nach ④ dass  $\ell_i \leq 1 + nC/R_i$  ist

- Wegen  $\ell_i \geq i + 1$  folgt daher

$$k \leq i + 1 + R_{i+1} \leq \ell_i + R_{i+1} \leq R_{i+1} + 1 + nC/R_i$$

- Nun wählen wir  $i$  so, dass  $R_{i+1} \leq \sqrt{nC} < R_i$  ist und erhalten

$$k - 1 \leq R_{i+1} + nC/R_i \leq \sqrt{nC} + nC/\sqrt{nC} = 2\sqrt{nC}$$



- ② Falls jede Kante  $e \in E$  eine Kapazität  $c(e) \leq C$  hat, so gilt  $k \leq \min\{\sqrt{8mC}, 4(n^2C)^{1/3}\}$

## Beweis.

- Zum Nachweis von  $k \leq \sqrt{8mC}$  können wir  $F > \sqrt{2mC}$  annehmen
- Wir schätzen wieder die Längen  $\ell_i$  der Schichtnetzwerke  $N'_i$  ab
- Da jede Kante  $e \in E_{f_i}$  nach ② eine Kapazität  $c_{f_i}(e) \leq 2C$  hat und  $f - f_i$  nach ① ein maximaler Fluss in  $N_{f_i}$  der Größe  $R_i = F - |f_i|$  ist, folgt mit ⑤ dass  $\ell_i \leq 2mC/R_i$  ist
- Wegen  $\ell_i \geq i + 1$  folgt daher

$$k \leq i + 1 + R_{i+1} \leq \ell_i + R_{i+1} \leq R_{i+1} + 2mC/R_i$$

- Wählen wir nun  $i$  so, dass  $R_{i+1} \leq \sqrt{2mC} < R_i$  ist, so erhalten wir

$$k \leq R_{i+1} + 2mC/R_i \leq \sqrt{2mC} + \sqrt{2mC} = \sqrt{8mC}$$

- ② Falls jede Kante  $e \in E$  eine Kapazität  $c(e) \leq C$  hat, so gilt  $k \leq \min\{\sqrt{8mC}, 4(n^2C)^{1/3}\}$

## Beweis (Schluss)

- Zum Nachweis von  $k \leq 4(n^2C)^{1/3}$  können wir annehmen, dass  $F > 2(n^2C)^{1/3} = (2n\sqrt{2C})^{2/3}$  ist
- Zudem folgt mit ⑤ dass  $N'_i$  eine Länge  $\ell_i \leq 2n\sqrt{2C/R_i}$  hat
- Wegen  $\ell_i \geq i + 1$  folgt daher

$$k \leq i + 1 + R_{i+1} \leq \ell_i + R_{i+1} \leq R_{i+1} + 2n\sqrt{2C/R_i}$$

- Wählen wir nun  $i$  so, dass  $R_{i+1} \leq (2n\sqrt{2C})^{2/3} < R_i$  ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned} k &\leq R_{i+1} + 2n\sqrt{2C/R_i} \\ &\leq (2n\sqrt{2C})^{2/3} + 2n\sqrt{2C}/(2n\sqrt{2C})^{1/3} \\ &= 2(2n\sqrt{2C})^{2/3} = 4(n^2C)^{1/3} \end{aligned}$$

## Korollar

Sei  $T$  die Laufzeit des Algorithmus von Dinitz unter Verwendung von `blockfluss1` bei Eingabe von  $N = (V, E, s, t, c)$

- 1 Falls jeder Knoten  $u \in V \setminus \{s, t\}$  einen Durchsatz  $D(u) \leq C$  hat, so gilt  $T = O((nC + m)\sqrt{nC})$
- 2 Falls jede Kante  $e \in E$  eine Kapazität  $c(e) \leq C$  hat, so gilt  $T = O(\min\{(mC)^{3/2}, C^{4/3}n^{2/3}m\})$

## Beweis.

- Nach obigem Satz ist die Anzahl  $k$  der Schleifendurchläufe des Algorithmus von Dinitz im Fall 1 durch  $k \leq 1 + 2\sqrt{nC}$  und im Fall 2 durch  $k \leq \min\{\sqrt{8mC}, 4(n^2C)^{1/3}\}$  beschränkt
- Zudem folgt mit 3 dass jeder Knoten  $u$  (außer  $s$  und  $t$ ) und jede Kante  $e$  in jedem Restnetzwerk  $N_{f_i}$  (und somit auch in jedem Schichtnetzwerk  $N'_{f_i}$ ) einen Durchsatz  $D(u) \leq C$  bzw. eine Kapazität  $c(e) \leq 2C$  haben

**Prozedur** blockfluss1( $S$ ),  $S = (V, E, s, t, c)$ 

```
1 for all  $e \in E \cup E^R$  do  $g(e) := 0$ 
2  $u := s$ ;  $K := (s)$ ; done := false
3 repeat
4   if  $\exists e = (u, v) \in E$  then
5     push( $K, v$ );  $u := v$ 
6   elseif  $u = t$  then
7      $P := K$ -Pfad von  $s$  nach  $t$ 
8      $c(P) := \min\{c(e) \mid e \in P\}$ 
9     for all  $e \in P$  do
10       $g(e) := g(e) + c(P)$ ;  $g(e^R) := -g(e)$ ;  $c(e) := c(e) - c(P)$ 
11      if  $c(e) = 0$  then  $E := E \setminus \{e\}$ 
12       $K := (s)$ ;  $u := s$ 
13   elseif  $u \neq s$  then \ \ backtracking
14     pop( $K$ );  $u' := \text{top}(K)$ ;  $E := E \setminus \{(u', u)\}$ ;  $u := u'$ 
15   else done := true
16 until done
17 return  $g$ 
```

- ① Falls jeder Knoten  $u \in V \setminus \{s, t\}$  einen Durchsatz  $D(u) \leq C$  hat, so gilt  $T = O((nC + m)\sqrt{nC})$

## Beweis.

- Jedesmal wenn `blockfluss1` einen  $s$ - $t$ -Pfad  $P$  im aktuellen Schichtnetzwerk findet, verringert sich der Durchsatz  $c(u)$  der auf  $P$  liegenden Knoten  $u$  um den Wert  $c(P) \geq 1$ , da der Fluss  $g$  durch diese Knoten um diesen Wert steigt
- Daher kann jeder Knoten an maximal  $C$  Flusserhöhungen beteiligt sein, bevor sein Durchsatz auf 0 sinkt
- Da somit pro Knoten ein Zeitaufwand von  $O(C)$  für alle erfolgreichen Tiefensuchschritte, die zu einem  $s$ - $t$ -Pfad führen, und zusätzlich pro Kante ein Zeitaufwand von  $O(1)$  für alle nicht erfolgreichen Tiefensuchschritte anfällt, läuft `blockfluss1` in Zeit  $O(nC + m)$

- 2 Falls jede Kante  $e \in E$  eine Kapazität  $c(e) \leq C$  hat, so gilt  
 $T = O(\min\{(mC)^{3/2}, C^{4/3}n^{2/3}m\})$

## Beweis.

- Jedesmal wenn `blockfluss1` einen  $s$ - $t$ -Pfad  $P$  im Schichtnetzwerk findet, verringert sich die Kapazität  $c(e)$  der auf  $P$  liegenden Kanten  $e$  um den Wert  $c(P) \geq 1$
- Da somit pro Kante ein Zeitaufwand von  $O(C)$  für alle erfolgreichen Tiefensuchschritte und  $O(1)$  für alle nicht erfolgreichen Tiefensuchschritte anfällt, läuft `blockfluss1` in Zeit  $O(mC + m) = O(mC)$  □

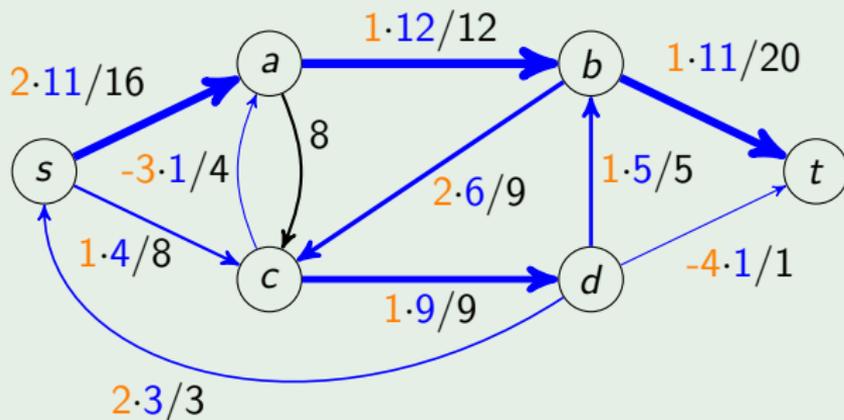
## Kostenoptimale Flüsse

- In bestimmten Anwendungen fallen für die Benutzung jeder Kante Kosten an, deren Höhe proportional zum Fluss durch die Kante ist
- Falls zwei Flüsse  $f$  und  $g$  die einzelnen Kanten eines Netzwerks unterschiedlich beanspruchen, ist es möglich, dass  $f$  und  $g$  unterschiedliche Kosten verursachen, obwohl sie die gleiche Größe  $|f| = |g|$  haben
- Gesucht ist dann ein maximaler Fluss  $f$  mit minimalen Kosten, wobei die Kosten von  $f$  in  $N$  wie folgt auf der Basis einer **Kostenfunktion**  $k$  bestimmt werden
- Jede Kante  $e \in E$  mit  $f(e) \geq 0$  verursacht Kosten in Höhe von  $k(e)f(e)$
- Die **Gesamtkosten** von  $f$  in  $N = (V, E, s, t, c, k)$  betragen daher

$$k(f) = \sum_{f(e)>0} k(e)f(e)$$

## Beispiel

- Die Abbildung zeigt einen Fluss  $f$  in  $N$ , wobei alle Kanten  $e \in E$  mit  $f(e) > 0$  mit  $k(e) \cdot f(e)/c(e)$  beschriftet sind:



- Seine Größe ist  $|f| = f(\{s\}) = 11 + 4 - 3 = 12$  und seine Kosten sind

$$k(f) = \sum_{f(e) > 0} k(e)f(e) = (12 + 11 + 5 + 4 + 9) + 2(11 + 6 + 3) - 3 - 4 = 90$$

## Kostenoptimale Flüsse

- Ist  $k(e) < 0$  so bedeuten Kosten in Höhe von  $k(e)f(e)$  einen Gewinn in Höhe von  $-k(e)f(e)$  und umgekehrt
- Erhöhen wir den Fluss  $f(e)$  durch eine Kante  $e$  um  $a$ , so fallen dafür Kosten in Höhe von  $k(e) \cdot a$  an
- Entsprechend verursacht eine Erniedrigung von  $f(e)$  um  $a$  einen Gewinn von  $k(e) \cdot a$  (bzw. Kosten in Höhe von  $-k(e) \cdot a$ )
- Da eine Erhöhung von  $f(e)$  um  $a$  den Fluss  $f(e^R) = -f(e)$  durch  $e^R$  um  $a$  erniedrigt, muss also  $k(e^R) = -k(e)$  sein
- Möchten wir für eine Kante  $e = (u, v)$  einen anderen Kostenfaktor  $b$  als  $-k(e^R)$  haben, so können wir einen neuen Knoten  $w$  zu  $V$  hinzufügen und die Kante  $e$  durch den Pfad  $P = (u, w, v)$  ersetzen
- Nun kann  $k(P)$  unabhängig vom Wert  $k(e^R)$  mittels  $k(u, w) = b$  und  $k(w, v) = 0$  auf den gewünschten Wert  $b$  gesetzt werden

## Kostenoptimale Flüsse

- Wir betrachten in diesem Abschnitt also Netzwerke der Form  $N = (V, E, s, t, c, k)$ , wobei  $k$  eine antisymmetrische Funktion  $k : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $k(e) = -k(e^R)$  für alle  $e \in V \times V$  ist
- Zudem definieren wir für beliebige Multimengen  $F$  von Kanten  $e \in V \times V$  den **Kostenfaktor** oder einfach die **Kosten von  $F$**  als  $k(F) = \sum_{e \in F} v_F(e)k(e)$
- Jede Kante  $e \in F$  wird bei der Berechnung von  $k(F)$  also entsprechend der Häufigkeit  $v_F(e)$  ihres Vorkommens in  $F$  berücksichtigt
- Wir benutzen diese Notation auch für Pfade  $P$  (oder Kreise  $K$ ) und schreiben  $k(P)$ , wobei wir  $P$  als Menge seiner Kanten auffassen
- Wir nennen  $F$  **negativ**, falls  $k(F) < 0$  ist
- Für einen Fluss  $f$  sei

$$k_{\min}(f) = \min\{k(g) \mid g \text{ ist ein Fluss in } N \text{ mit } |g| = |f|\}$$

das Minimum der Kosten  $k(g)$  aller Flüsse  $g$  in  $N$  der Größe  $|g| = |f|$

## Lemma

Ein Fluss  $f$  in  $N$  hat genau dann minimale Kosten  $k(f) = k_{\min}(f)$ , wenn es im Restnetzwerk  $N_f$  keinen negativen Kreis  $K$  mit  $k(K) < 0$  gibt

## Beweis.

- Falls es in  $N_f$  einen negativen Kreis  $K$  gibt, können wir den Fluss durch alle Kanten  $e \in K$  um eins erhöhen, um einen Fluss  $g$  der Größe  $|g| = |f|$  mit  $k(g) = k(f) + k(K) < k(f)$  zu erhalten
- Sei nun umgekehrt  $g$  ein Fluss in  $N$  mit  $|g| = |f|$  und  $k(g) < k(f)$
- Wegen  $g(e) - f(e) \leq c(e) - f(e)$  ist dann  $h = g - f$  ein Fluss im Restnetzwerk  $N_f = (V, E_f, s, t, c_f, k)$
- Da  $h$  die Größe  $|h| = |g| - |f| = 0$  hat, können wir  $h$  als Summe von Flüssen  $f_{K_1}, \dots, f_{K_\ell}$  in  $N_f$  darstellen, wobei jeder Fluss  $f_{K_i}$  nur für Kanten  $e$  auf einem Kreis  $K_i$  in  $(V, E_f)$  einen positiven Wert  $f_{K_i}(e) = w_i > 0$  annimmt (siehe nächste Folie)

## Beweis (Fortsetzung).

- Wegen  $k(f_{K_1}) + \dots + k(f_{K_\ell}) = k(g - f) = k(g) - k(f) < 0$  und  $k(f_{K_i}) = \sum_{e \in K_i} f_{K_i}(e)k(e) = w_i k(K_i)$  muss mindestens ein Kreis  $K_i$  negativ sein
- Um für  $i = 0, \dots, \ell - 1$  den Fluss  $f_{K_{i+1}}$  und den zugehörigen Kreis  $K_{i+1}$  zu finden, wählen wir eine beliebige Kante  $e_{i,1}$  aus  $E_f$ , für die der Fluss  $r_i = h - f_{K_1} - \dots - f_{K_i}$  einen minimalen positiven Wert  $w_i = r_i(e_{i,1}) > 0$  annimmt
- Falls es keine Kante  $e \in E_f$  mit  $r_i(e) > 0$  gibt, sind wir fertig, weil dann  $r_i$  der Nullfluss mit  $r_i(e) = 0$  für alle  $e \in V \times V$  und somit  $\ell = i$  ist
- Andernfalls benutzen wir die Tatsache, dass  $r_i$  wie  $h$  und die bereits gefundenen Flüsse  $f_{K_1}, \dots, f_{K_i}$  den Wert 0 hat, um einen negativen Kreis  $K_{i+1}$  zu finden
- Wegen  $|r_i| = 0$  erfüllt  $r_i$  nämlich die Kontinuitätsbedingung auch für die Knoten  $s$  und  $t$

## Beweis (Schluss)

- Daher können wir  $K_{i+1}$  wie folgt konstruieren
  - Beginnend mit  $j = 1$  wählen wir zu jeder Kante  $e_{i,j} = (u, v)$  solange eine Fortsetzung  $e_{i,j+1} = (v, w) \in E_f$  mit  $r_i(e_{i,j+1}) > 0$ , bis sich ein Kreis  $K_{i+1}$  schließt
- Nun setzen wir  $f_{K_{i+1}}(e_{i,j}) = w_i$  für alle Kanten  $e_{i,j}$  auf dem Kreis  $K_{i+1}$  und  $f_{K_{i+1}}(e_{i,j}) = 0$  für alle Kanten außerhalb von  $K_{i+1}$
- Da die Anzahl der Kanten in  $E_f$ , die unter dem Fluss  $r_{i+1}$  den Wert 0 haben, gegenüber  $r_i$  mindestens um eins zunimmt, ist die Anzahl  $\ell$  der gefundenen Kreise durch  $\ell \leq |E_f| \leq 2m$  beschränkt □

Mithilfe von obigem Lemma lässt sich nun ein maximaler Fluss mit minimalen Kosten wie folgt berechnen

- Wir berechnen zuerst einen maximalen Fluss  $f$  und setzen  $f_0 = f$
- Dann berechnen wir für  $i = 0, 1, \dots$  einen negativen Kreis  $K_{i+1}$  in  $N_{f_i}$
- Hierzu fügen wir dem Digraphen  $(V, E_{f_i}, k)$  einen neuen Knoten  $s'$  hinzu und verbinden  $s'$  mit allen Knoten  $u \in V$  durch eine neue Kante  $(s', u)$  mit  $k(s', u) = 0$
- Dann suchen wir mit dem Bellman-Ford-Moore (BFM) Algorithmus in dem resultierenden Digraphen  $G_i = (V \cup \{s'\}, E_{f_i} \cup \{(s', u) \mid u \in V\}, k)$  nach einem negativen Kreis  $K_{i+1}$
- Falls es in  $G_i$  keinen negativen Kreis gibt, ist  $f_i$  ein maximaler Fluss in  $N$  mit minimalen Kosten
- Andernfalls benutzen wir den Fluss  $f_{K_{i+1}}$ , der auf jeder Kante  $e$  auf  $K_{i+1}$  den Wert  $f_{K_{i+1}}(e) = c_{f_i}(K_{i+1}) = \min\{c_{f_i}(e) \mid e \in K_{i+1}\}$  und außerhalb von  $K_{i+1}$  den Wert 0 hat, um den Fluss  $f_{i+1} = f_i + f_{K_{i+1}}$  zu erhalten

## Kostenoptimale Flüsse

- Da sich die Kosten von  $f_i$  wegen

$$k(f_{i+1}) - k(f_i) = k(f_{K_{i+1}}) - k(K_{i+1}) \leq -1$$

bei jeder Iteration um mindestens eins verringern und die Kostendifferenz zwischen zwei beliebigen Flüssen in  $N_f$  durch

$$D = \sum_{e \in E} |k(e)| (c(e) + c(e^R))$$

beschränkt ist, ist  $f_\ell$  nach  $\ell \leq D$  Iterationen ein kostenminimaler Fluss

- Da der BFM-Algorithmus in Zeit  $O(mn)$  läuft, führt dies auf eine Laufzeit von  $O(Dmn)$ , um die Kosten von  $f_0$  zu minimieren
- Berechnen wir  $f_0$  mit Dinitz in Zeit  $O(n^3)$ , so erhalten wir folgenden Satz

### Satz

In einem Netzwerk  $N$  kann ein maximaler Fluss  $f$  mit minimalen Kosten in Zeit  $O(n^3 + Dmn)$  bestimmt werden

## Kostenoptimale Flüsse

Das nächste Lemma zeigt einen Weg, wie sich in einem Netzwerk ohne negative Kreise ein maximaler Fluss  $f$  mit minimalen Kosten in Zeit  $O(|f|mn)$  berechnen lässt

**Lemma.** Sei  $f_i$  ein Fluss in  $N$  mit  $k(f_i) = k_{\min}(f_i)$

Dann ist  $f_{i+1} = f_i + f_{P_{i+1}}$  für jeden Zunahmepfad  $P_{i+1}$  in  $N_{f_i}$  mit

$$k(P_{i+1}) = \min\{k(P') \mid P' \text{ ist ein Zunahmepfad in } N_{f_i}\}$$

ein Fluss in  $N$  mit  $k(f_{i+1}) = k_{\min}(f_{i+1})$

**Beweis.**

- Unter der Annahme, dass  $k(f_{i+1}) > k_{\min}(f_{i+1})$  ist, gibt es nach obigem Lemma einen negativen Kreis  $K$  in  $N_{f_{i+1}}$
- Wir benutzen  $K$ , um  $P_{i+1}$  in einen Zunahmepfad  $P'$  in  $N_{f_i}$  mit  $k(P') < k(P_{i+1})$  zu transformieren

## Beweis (Fortsetzung).

- Sei  $F = K + P_{i+1}$  die Multimenge aller Kanten, die auf  $K$  oder  $P_{i+1}$  liegen, d.h. jede Kante in  $K \Delta P_{i+1} = (K \setminus P_{i+1}) \cup (P_{i+1} \setminus K)$  kommt genau einmal und jede Kante in  $K \cap P_{i+1}$  kommt genau 2-mal in  $F$  vor
- $F$  ist also ein Multigraph bestehend aus dem  $s$ - $t$ -Pfad  $P_{i+1}$  in  $N_{f_i}$  und dem Kreis  $K$  in  $N_{f_{i+1}}$  und es gilt  $k(F) = k(P_{i+1}) + k(K) < k(P_{i+1})$
- Um in  $F$  einen  $s$ - $t$ -Pfad  $P'$  von  $N_{f_i}$  mit  $k(P') < k(P_{i+1})$  zu finden, entfernen wir wie folgt alle Kanten in  $\hat{F} = F \setminus E_{f_i} = K \setminus E_{f_i}$  aus  $F$
- Wegen  $\hat{F} \subseteq K \setminus P_{i+1}$  kommt jede Kante  $e \in \hat{F}$  genau einmal in  $F$  vor
- Zudem wird jede Kante  $e \in \hat{F}$  wegen
  - $f_i(e) = c(e)$  (da  $e \notin E_{f_i}$ ) zwar von  $f_i$ , aber wegen
  - $e \in K \subseteq E_{f_{i+1}}$  nicht von  $f_{i+1}$  gesättigt
- Daher muss  $f_i(e) \neq f_{i+1}(e)$  und somit  $e^R \in P_{i+1}$  sein (da  $e \notin P_{i+1}$ )
- Wegen  $e^R \in P_{i+1} \setminus K$  (da  $e \in K$ ) kommt also für jede Kante  $e \in \hat{F}$  auch  $e^R$  genau einmal in  $F$  vor

## Beweis (Schluss)

- Entfernen wir nun alle solchen Kantenpaare  $e, e^R$  aus  $F$ , so erhalten wir die Multimenge  $F' = F \setminus (\hat{F} \cup \hat{F}^R) \subseteq E_{f_i}$ , die wegen  $k(e) + k(e^R) = 0$  dieselben Kosten  $k(F') = k(F) < k(P_{i+1})$  wie  $F$  hat
- Da  $F'$  zudem aus  $F$  durch Entfernen von Kreisen (der Länge 2) entsteht, ist  $F'$  wie  $F$  ein Multigraph, der sich in einen  $s$ - $t$ -Pfad  $P'$  und eine gewisse Anzahl  $\ell \geq 0$  von Kreisen  $K_1, \dots, K_\ell$  in  $N_{f_i}$  zerlegen lässt
- Da nach Voraussetzung keine negativen Kreise in  $N_{f_i}$  existieren, folgt

$$k(P') = k(F') - \sum_{i=1}^{\ell} k(K_i) \leq k(F') = k(F) < k(P_{i+1})$$

□

- Basierend auf obigem Lemma können wir nun folgenden Algorithmus zur Bestimmung eines maximalen Flusses mit minimalen Kosten in einem Netzwerk  $N$  angeben, das keine negativen Kreise enthält

**Algorithmus** Min-Cost-Flow( $V, E, s, t, c, k$ )

```
1 for all  $(u, v) \in V \times V$  do  
2    $f(u, v) := 0$   
3 while  $P := \text{min-zunahmepfad}(f) \neq \perp$  do  
4    $\text{addierepfad}(f, P)$ 
```

- Hierbei berechnet die Prozedur  $\text{min-zunahmepfad}(f)$  einen Zunahmepfad  $P$  in  $N_f$  mit minimalen Kosten
- Da dann der Fluss  $f' = f + f_P$  nach obigem Lemma minimale Kosten  $k(f') = k_{\min}(f')$  in  $N$  hat, hat auch  $N_{f'}$  keine negativen Kreise
- Daher kann  $P$  bspw. mit dem BFM-Algorithmus berechnet werden, der in Zeit  $O(mn)$  läuft
- Dies führt auf eine Gesamtlaufzeit von  $O(Mmn)$ , wobei  $M = |f|$  die Größe eines maximalen Flusses  $f$  in  $N$  ist

## Kostenoptimale Flüsse

Tatsächlich lässt sich für Netzwerke ohne negative Kreise die Laufzeit unter Verwendung des Dijkstra-Algorithmus in Kombination mit einer Preisfunktion auf  $O(mn + |f|m \log n)$  verbessern

**Satz.** Sei  $N = (V, E, s, t, c, k)$  ein Netzwerk ohne negative Kreise

Dann lässt sich in  $N$  ein maximaler Fluss  $f$  mit minimalen Kosten in Zeit  $O(mn + |f|m \log n)$  berechnen

**Definition.** Sei  $G = (V, E, k)$  ein Digraph mit Kostenfunktion  $k : E \rightarrow \mathbb{Z}$

- Eine Funktion  $p : V \rightarrow \mathbb{Z}$  heißt **Preisfunktion** für  $G$ , falls für jede Kante  $e = (u, v)$  in  $E$  gilt:

$$p(v) - p(u) \leq k(u, v)$$

- Die  **$p$ -reduzierte Kostenfunktion**  $k^p : E \rightarrow \mathbb{N}$  ist

$$k^p(u, v) = k(u, v) + p(u) - p(v)$$

## Lemma

- Ein Digraph  $G = (V, E, k)$  mit Kostenfunktion  $k : E \rightarrow \mathbb{Z}$  hat genau dann keine negativen Kreise, wenn es eine Preisfunktion  $p$  für  $G$  gibt
- Zudem lässt sich eine geeignete Preisfunktion  $p$  in Zeit  $O(mn)$  finden

## Beweis.

- Wir zeigen zuerst die Rückwärtsrichtung
- Sei also  $p$  eine Preisfunktion mit  $k^p(e) \geq 0$  für alle  $e \in E$
- Dann gilt für jede Kantenmenge  $F \subseteq E$  die Ungleichung  $k^p(F) \geq 0$
- Da zudem für jeden Kreis  $K$  in  $G$  die Gleichheit  $k(K) = k^p(K)$  gilt, folgt  $k(K) = k^p(K) \geq 0$
- Für die Vorwärtsrichtung sei nun  $G = (V, E, k)$  ein Digraph ohne negative Kreise

## Beweis (Fortsetzung).

- Betrachte den Digraphen  $G' = (V', E', k')$ , der aus  $G$  durch Hinzunahme eines Knotens  $s'$  und von Kanten  $(s', x)$  mit  $k'(s', x) = 0$  für alle  $x \in V$  entsteht
- Dann gibt es auch in  $G'$  keine negativen Kreise und wir können mit BFM für jeden Knoten  $x \in V$  einen bzgl.  $k'$  kürzesten Pfad  $P_x$  von  $s$  nach  $x$  in Zeit  $O(mn)$  berechnen
- Setzen wir  $p(x)$  gleich der Länge von  $P_x$ , so gilt für jede Kante  $e = (u, v) \in E$  die Ungleichung

$$p(v) \leq p(u) + k(u, v),$$

d.h.  $p(x)$  ist die gesuchte Preisfunktion für  $G$



## Kostenoptimale Flüsse

- Um einen maximalen Fluss mit minimalen Kosten in einem Netzwerk  $N = (V, E, s, t, c, k)$  in Zeit  $O(mn + |f|m \log n)$  zu berechnen, rufen wir zuerst BFM mit Startknoten  $s'$  auf, um nach einem negativen Kreis  $K$  im erweiterten Digraphen  $G' = (V', E', k')$  zu suchen
- Wird  $K$  nicht gefunden, berechnet BFM hierbei eine Preisfunktion  $p_0$  für das Netzwerk  $N_0 = N_{f_0} = N$ , wobei  $f_0$  der Nullfluss in  $N$  ist
- Nun können wir mit Dijkstra für  $i = 0, 1, \dots$  in Zeit  $O(m \log n)$ 
  - einen bzgl.  $k^{P_i}$  kürzesten Zunahmepfad  $P_{i+1}$  in  $N_{f_i}^{P_i}$  und
  - einen Fluss  $f_{i+1} = f_i + f_{P_{i+1}}$  der Größe  $|f_{i+1}| > |f_i|$  mit minimalen Kosten  $k(f_{i+1}) = k_{min}(f_{i+1})$
  - sowie eine Preisfunktion  $p_{i+1}$  für  $N_{f_{i+1}}$  berechnen
- Ein bzgl.  $k^{P_i}$  kürzester  $s$ - $t$ -Pfad  $P$  ist nämlich auch bzgl.  $k$  ein kürzester  $s$ - $t$ -Pfad, da  $k^{P_i}(P) = k(P) + p_i(s) - p_i(t)$  und  $p_i(s) - p_i(t)$  eine von  $P$  unabhängige Konstante ist

- Zudem lässt sich aus  $p_i$  nach folgendem Lemma eine Preisfunktion  $p_{i+1} = p_i + \ell_i$  für  $k$  in  $N_{f_{i+1}}$  finden, wobei  $\ell_i(x)$  die minimale Pfadlänge von  $s$  nach  $x$  in  $N_{f_i}^{p_i}$  ist
- Dabei kann  $\ell_i$  und somit auch  $p_{i+1}$  von Dijkstra zusammen mit  $P_{i+1}$  in Zeit  $O(m \log n)$  gleich mitberechnet werden

### Lemma

- Sei  $\ell_i(x)$  die minimale Pfadlänge von  $s$  nach  $x$  in  $N_{f_i}$  bzgl.  $k^{p_i}$ , wobei  $p_i : V \rightarrow \mathbb{Z}$  eine beliebige Funktion ist
- Dann ist  $p_{i+1}(x) = p_i(x) + \ell_i(x)$  eine Preisfunktion für  $k$  in  $N_{f_{i+1}}$

### Beweis.

- Wir zeigen zuerst, dass  $p_{i+1}$  eine Preisfunktion für  $k$  in  $N_{f_i}$  ist

## Beweis (Fortsetzung).

- Da  $\ell_i(v) \leq \ell_i(u) + k^{P_i}(e)$  und  $k^{P_i}(e) = k(e) + p_i(u) - p_i(v)$  für jede Kante  $e = (u, v) \in E_{f_i}$  gilt, folgt

$$\begin{aligned} k^{P_{i+1}}(e) &= k(e) + p_{i+1}(u) - p_{i+1}(v) \\ &= k(e) + p_i(u) + \ell_i(u) - p_i(v) - \ell_i(v) \\ &= k^{P_i}(e) + \ell_i(u) - \ell_i(v) \geq 0 \end{aligned}$$

d.h.  $p_{i+1}$  ist eine Preisfunktion für  $k$  in  $N_{f_i}$

- Falls  $e$  auf  $P_{i+1}$  liegt, gilt sogar  $k^{P_{i+1}}(e) = 0$ , da  $P_{i+1}$  ein bzgl.  $k^{P_i}$  kürzester  $s$ - $t$ -Pfad in  $N_{f_i}$  und daher  $\ell_i(v) = \ell_i(u) + k^{P_i}(e)$  ist
- Da zudem für jede Kante  $e$  in  $N_{f_{i+1}}$ , die nicht zu  $N_{f_i}$  gehört, die Kante  $e^R$  auf dem Pfad  $P_{i+1}$  liegt, folgt wegen  $k^{P_{i+1}}(e^R) = 0$ ,

$$\begin{aligned} k^{P_{i+1}}(e) &= k(e) + p_{i+1}(u) - p_{i+1}(v) \\ &= -k(e^R) - p_{i+1}(v) + p_{i+1}(u) = -k^{P_{i+1}}(e^R) = 0 \end{aligned}$$

d.h.  $p_{i+1}$  ist auch eine Preisfunktion für  $k$  in  $N_{f_{i+1}}$



# Kürzeste Pfade in Distanzgraphen

- In vielen Anwendungen tritt das Problem auf, einen kürzesten Pfad von einem Startknoten  $s$  zu einem Zielknoten  $t$  in einem Digraphen zu finden, dessen Kanten  $(u, v)$  vorgegebene **Längen**  $\ell(u, v) \geq 0$  haben
- Die Länge eines Pfades  $P = (v_0, \dots, v_j)$  ist  $\ell(P) = \sum_{i=0}^{j-1} \ell(v_i, v_{i+1})$
- Die kürzeste Pfadlänge von  $s$  nach  $t$  wird als **Distanz**  $d(s, t)$  zwischen  $s$  und  $t$  bezeichnet,

$$d(s, t) = \min\{\ell(P) \mid P \text{ ist ein } s\text{-}t\text{-Pfad}\}$$

- Falls kein  $s$ - $t$ -Pfad existiert, setzen wir  $d(s, t) = \infty$

# Der Dijkstra-Algorithmus

- Der Dijkstra-Algorithmus findet einen kürzesten Pfad  $P_u$  von  $s$  zu allen erreichbaren Knoten  $u$  (single-source shortest-path problem)
- Dabei werden alle Knoten  $u$ , für die bereits ein  $s$ - $u$ -Pfad  $P_u$  bekannt ist, zusammen mit der Pfadlänge  $d(u) = \ell(P_u)$  in einer Menge  $U$  gespeichert und erst dann wieder aus  $U$  entfernt, wenn  $d(u) = d(s, u)$  ist
- Für eine effiziente Implementierung benötigen wir für  $U$  eine Datenstruktur, auf der sich folgende Operationen effizient ausführen lassen

## Benötigte Operationen

$\text{Init}(U)$ : Initialisiert  $U$  als leere Menge

$\text{Update}(U, u, d)$ : Erniedrigt den Wert von  $u$  auf  $d$  (nur wenn der aktuelle Wert größer als  $d$  ist), ist  $u$  noch nicht in  $U$  enthalten, wird  $u$  mit dem Wert  $d$  zu  $U$  hinzugefügt

$\text{GetMin}(U)$ : Gibt ein Element aus  $U$  mit dem kleinsten  $d$ -Wert zurück und entfernt es aus  $U$  (ist  $U$  leer, wird der Wert  $\text{nil}$  zurückgegeben)

# Der Dijkstra-Algorithmus

- Voraussetzung für die Korrektheit des Algorithmus' ist, dass alle Kanten eine nichtnegative Länge  $\ell(u, v) \geq 0$  haben
- In diesem Fall wird  $D = (V, E, \ell)$  auch **Distanzgraph** genannt
- Während der Suche werden bestimmte Kanten  $e = (u, v)$  daraufhin getestet, ob  $d(u) + \ell(u, v) < d(v)$  ist
- Da in diesem Fall die Kante  $e$  auf eine Herabsetzung von  $d(v)$  auf den Wert  $d(u) + \ell(u, v)$  „drängt“, wird diese Wertzuweisung als **Relaxation** von  $e$  bezeichnet
- Welche Kanten  $(u, v)$  auf Relaxation getestet werden, wird beim Dijkstra-Algorithmus durch eine einfache **Greedystrategie** bestimmt:
  - Wähle  $u \in U$  mit minimalem  $d$ -Wert und teste alle Kanten  $(u, v)$ , für die  $v$  nicht schon abgearbeitet ist
- Der Algorithmus führt also eine modifizierte **Breitensuche** aus, bei der die in Bearbeitung befindlichen Knoten in einer **Prioritätswarteschlange**  $U$  verwaltet werden

# Der Dijkstra-Algorithmus

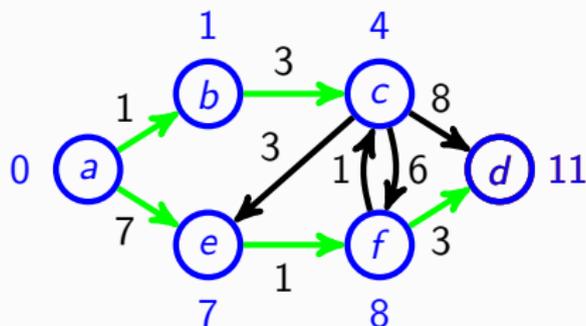
## Algorithmus Dijkstra( $V, E, \ell, s$ )

```
1 for all  $v \in V$  do
2    $d(v) := \infty$ ,  $\text{parent}(v) := \text{nil}$ ,  $\text{done}(v) := \text{false}$ 
3  $\text{Init}(U)$ ,  $\text{Update}(U, s, 0)$ ,  $d(s) := 0$ 
4 while  $u := \text{GetMin}(U) \neq \text{nil}$  do
5    $\text{done}(u) := \text{true}$ 
6   for all  $v \in N^+(u)$  do
7     if  $\text{done}(v) = \text{false} \wedge d(u) + \ell(u, v) < d(v)$  then
8        $d(v) := d(u) + \ell(u, v)$ ,  $\text{Update}(U, v, d(v))$ ,  $\text{parent}(v) := u$ 
```

- $d(u)$  speichert die aktuelle Länge des Pfades  $P_u$ ; Knoten außerhalb des aktuellen Breitensuchbaums  $T$  haben den  $d$ -Wert  $\infty$
- In jedem Schleifendurchlauf wird in Zeile 4 ein Knoten  $u$  mit minimalem  $d$ -Wert aus  $U$  entfernt und als abgearbeitet markiert
- Anschließend wird für alle von  $u$  wegführenden Kanten  $e = (u, v)$  geprüft, ob eine Relaxation ansteht
- Wenn ja, wird  $U$  aktualisiert und  $e$  wird neue Baumkante in  $T$

# Der Dijkstra-Algorithmus

Beispiel. Betrachte folgenden Distanzgraphen mit dem Startknoten  $a$ :



Inhalt von $U$	GetMin( $U$ )	besuchte Kanten	Updates
$(a, 0)$	$(a, 0)$	$(a, b), (a, e)$	$(b, 1), (e, 7)$
$(b, 1), (e, 7)$	$(b, 1)$	$(b, c)$	$(c, 4)$
$(c, 4), (e, 7)$	$(c, 4)$	$(c, d), (c, e), (c, f)$	$(d, 12), (f, 10)$
$(e, 7), (f, 10), (d, 12)$	$(e, 7)$	$(e, f)$	$(f, 8)$
$(f, 8), (d, 12)$	$(f, 8)$	$(f, c), (f, d)$	$(d, 11)$
$(d, 11)$	$(d, 11)$	—	—

# Korrektheit des Dijkstra-Algorithmus'

Satz. Sei  $D = (V, E, \ell)$  ein Distanzgraph und sei  $s \in V$ .

Dann berechnet  $\text{Dijkstra}(V, E, \ell, s)$  für alle von  $s$  aus erreichbaren Knoten  $t \in V$  einen kürzesten  $s$ - $t$ -Pfad  $P_t$

Beweis.

- Wir zeigen zuerst, dass alle von  $s$  aus erreichbaren Knoten  $t \in V$  zu  $U$  hinzugefügt werden
- Dies folgt aus der Tatsache, dass  $s$  zu  $U$  hinzugefügt wird, und spätestens dann, wenn ein Knoten  $u$  in Zeile 4 aus  $U$  entfernt wird, sämtliche Nachfolger von  $u$  zu  $U$  hinzugefügt werden
- Zudem ist klar, dass  $d(t) \geq d(s, t)$  ist, da  $P_t$  im Fall  $d(t) < \infty$  ein  $s$ - $t$ -Pfad der Länge  $d(t)$  ist
- Es bleibt noch zu zeigen, dass  $P_u$  ein kürzester  $s$ - $u$ -Pfad ist, sobald  $u$  aus  $U$  entfernt wird, d.h. es gilt  $d(u) = d(s, u)$

# Korrektheit des Dijkstra-Algorithmus'

## Beweis.

- Wir zeigen induktiv über die Anzahl  $k$  der vor  $u$  aus  $U$  entfernten Knoten, dass  $d(u) \leq d(s, u)$  ist
- Im Fall  $k = 0$  ist  $u = s$  und  $P_s$  hat die Länge  $d(s) = 0 = d(s, s)$
- Im Fall  $k \geq 1$  sei  $P = v_0, \dots, v_j = u$  ein kürzester  $s$ - $u$ -Pfad in  $G$  und sei  $v_i$  der Knoten mit maximalem Index  $i$ , der vor  $u$  aus  $U$  entfernt wird
  - Nach IV gilt dann  $d(v_i) = d(s, v_i)$  (1)
  - Zudem ist  $d(v_{i+1}) \leq d(v_i) + \ell(v_i, v_{i+1})$  (2)
  - Weiter gilt  $d(u) \leq d(v_{i+1})$  (3),  
da  $u$  im Fall  $u \neq v_{i+1}$  vor  $v_{i+1}$  aus  $U$  entfernt wird
  - Nun folgt

$$d(u) \stackrel{(3)}{\leq} d(v_{i+1}) \stackrel{(2)}{\leq} d(v_i) + \ell(v_i, v_{i+1})$$

$$\stackrel{(1)}{=} d(s, v_i) + \ell(v_i, v_{i+1}) = d(s, v_{i+1}) \leq d(s, u)$$

□

## Laufzeit des Dijkstra-Algorithmus'

- Wir überlegen uns zuerst, wie oft die einzelnen Operationen *Init*, *GetMin* und *Update* auf der Datenstruktur *U* ausgeführt werden
- Die *Init*-Operation wird nur einmal ausgeführt
- Da die *while*-Schleife für jeden von *s* aus erreichbaren Knoten genau einmal durchlaufen wird, wird die *GetMin*-Operation höchstens  $\min(n, m)$ -mal ausgeführt
- Da der Dijkstra-Algorithmus jede Kante höchstens einmal besucht, wird die *Update*-Operation höchstens  $m$ -mal ausgeführt
- Bezeichne  $Init(n)$ ,  $GetMin(n)$  und  $Update(n)$  den Aufwand zum Ausführen der Operationen *Init*, *GetMin* und *Update* für den Fall, dass *U* nicht mehr als  $n$  Elemente aufzunehmen hat
- Dann ist die Laufzeit des Dijkstra-Algorithmus' durch

$$\mathcal{O}(n + m + Init(n) + \min(n, m) \cdot GetMin(n) + m \cdot Update(n))$$

beschränkt

## Laufzeit des Dijkstra-Algorithmus'

- Die Laufzeit des Dijkstra-Algorithmus' hängt also wesentlich davon ab, wie wir die Datenstruktur  $U$  implementieren
  - Falls alle Kanten die gleiche Länge haben, wachsen die Distanzwerte der Knoten monoton in der Reihenfolge ihres Besuchs
  - In diesem Fall können wir  $U$  als Warteschlange implementieren, d.h. Dijkstra vereinfacht sich zur Prozedur BFS und läuft in Zeit  $\mathcal{O}(n + m)$
  - Falls die Kanten unterschiedliche Längen haben, betrachten wir folgende drei Möglichkeiten
- ① Da die Felder  $d$  und  $done$  bereits alle nötigen Informationen enthalten, kann man auf die (explizite) Implementierung von  $U$  auch verzichten
- In diesem Fall kostet die GetMin-Operation allerdings Zeit  $\mathcal{O}(n)$ , was auf eine Gesamtlaufzeit von  $\mathcal{O}(n^2)$  führt
  - Dies ist asymptotisch optimal, wenn  $G$  relativ dicht ist, also  $m = \Omega(n^2)$  Kanten enthält
  - Ist  $G$  dagegen relativ dünn, d.h.  $m = o(n^2)$ , so empfiehlt es sich,  $U$  als Prioritätswarteschlange zu implementieren

## Laufzeit des Dijkstra-Algorithmus'

- ② Es ist naheliegend,  $U$  in Form eines Heaps  $H$  zu implementieren
- In diesem Fall lässt sich die Operation `GetMin` in Zeit  $\mathcal{O}(\log n)$  implementieren
  - Da die Prozedur `Update` einen linearen Zeitaufwand erfordert, ist es effizienter, sie durch eine `Insert`-Operation zu simulieren
  - Dies führt zwar dazu, dass derselbe Knoten evtl. mehrmals mit unterschiedlichen Werten in  $H$  gespeichert wird
  - Die Korrektheit bleibt aber dennoch erhalten, wenn wir nur die erste Entnahme eines Knotens aus  $H$  beachten und die übrigen ignorieren
  - Da für jede Kante höchstens ein Knoten in  $H$  eingefügt wird, erreicht  $H$  maximal die Größe  $n^2$  und daher sind die Heap-Operationen `Insert` und `GetMin` immer noch in Zeit  $\mathcal{O}(\log n^2) = \mathcal{O}(\log n)$  ausführbar
  - Insgesamt erhalten wir somit eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(n + m \log n)$
  - Dies ist zwar für dünne Graphen sehr gut, aber für dichte Graphen schlechter als die in ① betrachtete implizite Implementierung von  $U$

## Laufzeit des Dijkstra-Algorithmus'

- 3 Als weitere Möglichkeit kann  $U$  auch in Form eines so genannten **Fibonacci-Heaps**  $F$  implementiert werden
- Dieser benötigt nur eine konstante amortisierte Laufzeit  $\mathcal{O}(1)$  für die Update-Operation und  $\mathcal{O}(\log n)$  für die GetMin-Operation
  - Insgesamt führt dies auf eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(m + n \log n)$
  - Allerdings sind Fibonacci-Heaps erst bei sehr großen Graphen mit mittlerer Dichte schneller

- Wir erhalten also folgende Laufzeiten:

	implizit	Heap	Fibonacci-Heap
Init	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$
Update	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(1)$
GetMin	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(\log n)$
Gesamtlaufzeit	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n + m \log n)$	$\mathcal{O}(m + n \log n)$

- Offen ist, ob eine Verbesserung auf  $\mathcal{O}(n + m)$  möglich ist

# Kürzeste Pfade in Graphen mit negativen Kantengewichten

- In manchen Anwendungen treten negative Kantengewichte  $k(e)$  auf
- Geben die Kantengewichte  $k(e)$  beispielsweise die mit einer Kante  $e$  verbundenen Kosten wider, so kann ein Gewinn durch negative Kosten modelliert werden
- Auf diese Weise lassen sich auch längste Pfade in Distanzgraphen  $(V, E, \ell)$  berechnen, indem man alle Kantenlängen  $k(u, v) = -\ell(u, v)$  setzt und in dem resultierenden Kostengraphen  $(V, E, k)$  einen kürzesten Pfad bestimmt
- Die Komplexität des Problems hängt wesentlich davon ab, ob gerichtete Kreise mit negativer Länge (bzw. Kosten) vorkommen oder nicht
- Falls negative Kreise vorkommen können, ist das Problem NP-hart
- Andernfalls existieren effiziente Algorithmen wie z.B.
  - der Bellman-Ford-Algorithmus (BF-Algorithmus) oder
  - der Bellman-Ford-Moore-Algorithmus (BFM-Algorithmus)

# Der Ford-Algorithmus

- Der Ford-Algorithmus arbeitet ganz ähnlich wie der Dijkstra-Algorithmus, betrachtet aber jede Kante nicht nur einmal, sondern eventuell mehrmals
- In seiner einfachsten Form sucht der Algorithmus wiederholt nach einer Kante  $e = (u, v)$  mit

$$d(u) + k(u, v) < d(v)$$

und aktualisiert den Wert von  $d(v)$  auf  $d(u) + k(u, v)$  (Relaxation)

- Die Laufzeit hängt dann wesentlich davon ab, in welcher Reihenfolge die Kanten auf Relaxation getestet werden
- Im besten Fall lässt sich eine lineare Laufzeit erreichen (z.B. wenn überhaupt keine Kreise existieren)
- Bei der Bellman-Ford-Variante wird in  $\mathcal{O}(mn)$  Schritten ein kürzester Pfad von  $s$  zu allen erreichbaren Knoten gefunden (sofern keine negativen Kreise existieren)

# Der Ford-Algorithmus

- Wir zeigen induktiv über die Anzahl  $k$  der Kanten eines kürzesten  $s$ - $t$ -Pfades, dass  $d(t) \leq d(s, t)$  gilt, falls  $d$  für alle Kanten  $(u, v) \in E$  die Dreiecksungleichung  $d(v) \leq d(u) + k(u, v)$  erfüllt (also  $d$  keine weiteren Relaxationen erlaubt)
- Im Fall  $k = 0$  ist  $t = s$  und somit  $d(s) = 0 = d(s, s)$
- Im Fall  $k > 0$  sei  $t$  ein Knoten, dessen kürzester  $s$ - $t$ -Pfad  $P$  aus  $k$  Kanten besteht
  - Nach IV gilt dann  $d(u) \leq d(s, u)$  für den Vorgänger  $u$  von  $t$  auf  $P$
  - Da  $d$  die Dreiecksungleichung für  $(u, t)$  erfüllt, folgt daher

$$d(t) \leq d(u) + k(u, t) \leq d(s, u) + k(u, t) = d(s, t)$$

- Aus dem Beweis folgt zudem, dass  $d(t)$  nach Relaxation aller Kanten eines kürzesten  $s$ - $t$ -Pfades  $P$  (in der Reihenfolge, in der die Kanten auf  $P$  angeordnet sind) einen Wert  $d(t) \leq d(s, t)$  hat
- Dies gilt auch, wenn dazwischen noch weitere Kanten relaxiert werden

# Der Bellman-Ford-Algorithmus

- Die Bellman-Ford-Variante testet in den ersten  $n - 1$  Runden jeweils alle Kanten auf Relaxation und speichert dabei für jede relaxierte Kante  $(u, v)$  den Knoten  $u$  in  $\text{parent}(v)$
- Da jetzt alle Kanten auf allen kürzesten Pfaden in der richtigen Reihenfolge relaxiert wurden, gilt nun  $d(u) \leq d(s, u)$  für alle Knoten  $u \in V$
- Kann daher in der  $n$ -ten Runde immer noch eine Kante  $e = (u, v)$  relaxiert werden, so lässt sich wie folgt ein negativer Kreis  $K$  finden:
  - Wir gehen von  $u$  aus mittels  $\text{parent}$  solange zurück, bis wir zum zweiten Mal am gleichen Knoten ankommen
- Die Laufzeit ist offensichtlich  $\mathcal{O}(mn)$

# Der Bellman-Ford-Algorithmus

## Algorithmus $\text{BF}(V, E, k, s)$

---

```
1 for all  $v \in V$  do  
2    $d(v) := \infty$   
3    $\text{parent}(v) := \text{nil}$   
4  $d(s) := 0$   
5 for  $i := 1$  to  $n - 1$  do  
6   for all  $(u, v) \in E$  do  
7     if  $d(u) + k(u, v) < d(v)$  then  
8        $d(v) := d(u) + k(u, v)$   
9        $\text{parent}(v) := u$   
10 for all  $(u, v) \in E$  do  
11   if  $d(u) + k(u, v) < d(v)$  then  
12     print (es gibt einen negativen Kreis)
```

---

# Der Bellman-Ford-Moore-Algorithmus

- Die BFM-Variante versucht eine Kante  $(u, v)$  nur dann zu relaxieren, wenn  $d(u)$  in der Runde davor erniedrigt wurde
- Um in Runde  $i + 1$  alle Knoten parat zu haben, deren  $d$ -Wert in Runde  $i$  verringert wurde, wird bei jeder Relaxation einer Kante  $(u, v)$  der Knoten  $v$  in einer Schlange  $Q$  gespeichert (falls er nicht schon in  $Q$  ist)
- Dabei kann in  $Q$  zusammen mit  $v$  auch die Rundenzahl  $i + 1$  der anstehenden Tests aller von  $v$  ausgehenden Kanten gespeichert werden
- Sobald aus  $Q$  ein Knoten mit Rundenzahl  $n + 1$  entfernt wird, bricht der Algorithmus mit der Meldung ab, dass negative Kreise existieren
- Da gegenüber der BF-Variante nur vergebliche Relaxationsversuche vermieden werden, liefern BF und BFM dasselbe Ergebnis

# Der Bellman-Ford-Moore-Algorithmus

## Algorithmus BFM( $V, E, k, s$ )

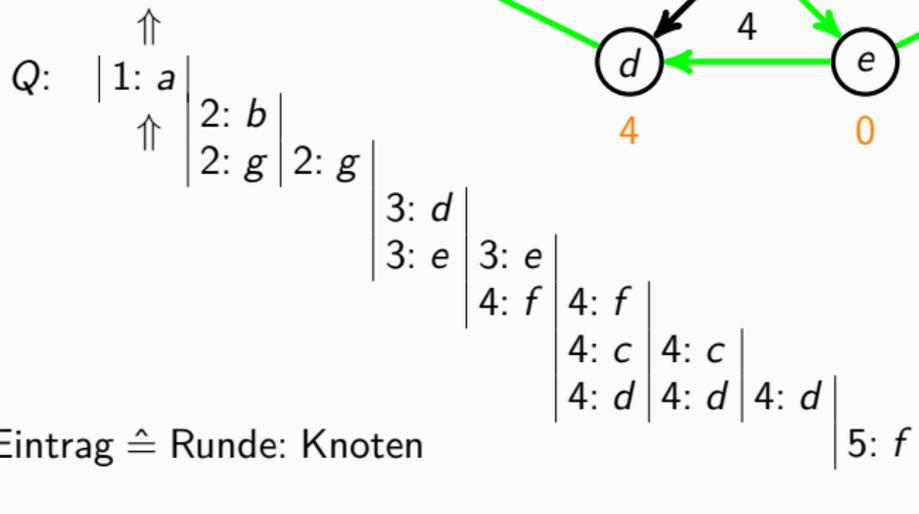
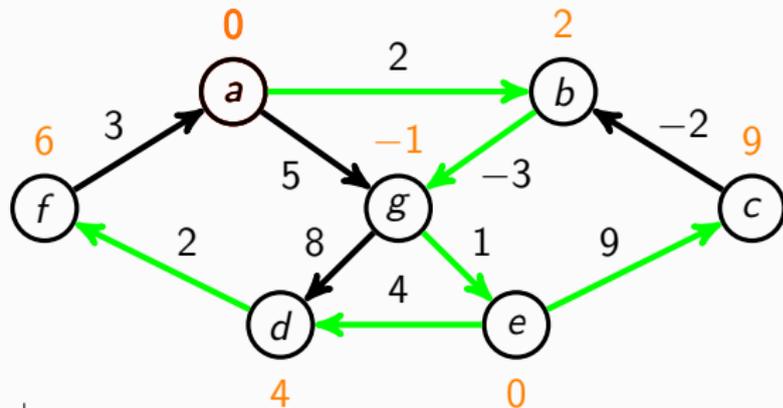
---

```
1  for all  $v \in V$  do
2     $d(v) := \infty$ ,  $\text{parent}(v) := \text{nil}$ ,  $\text{active}(v) := \text{false}$ 
3   $d(s) := 0$ ,  $\text{Init}(Q)$ ,  $\text{Enqueue}(Q, (1, s))$ ,  $\text{active}(s) := \text{true}$ 
4  while  $(i, u) := \text{Dequeue}(Q) \neq \text{nil}$  and  $i \leq n$  do
5     $\text{active}(u) := \text{false}$ 
6    for all  $v \in N^+(u)$  do
7      if  $d(u) + k(u, v) < d(v)$  then
8         $d(v) := d(u) + k(u, v)$ 
9         $\text{parent}(v) := u$ 
10     if  $\text{active}(v) = \text{false}$  then
11        $\text{Enqueue}(Q, (i + 1, v))$ 
12        $\text{active}(v) := \text{true}$ 
13  if  $i > n$  then
14     $\text{print}(\text{es gibt einen negativen Kreis})$ 
```

---

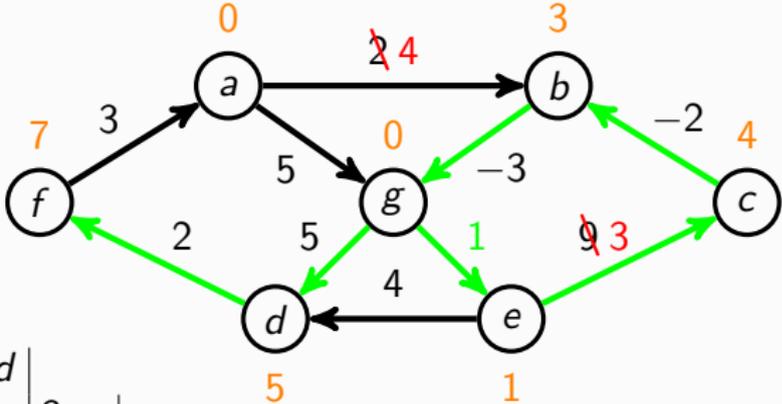
# Der Bellman-Ford-Moore-Algorithmus

Beispiel. Betrachte folgenden Kostengraphen mit dem Startknoten  $a$ :



# Der Bellman-Ford-Moore-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung).



Q:  $\begin{array}{l} \uparrow \\ | 1: a \\ \uparrow \\ | 2: b \\ | 2: g \end{array} | 2: g$

$\begin{array}{l} 3: d \\ 3: e \end{array} | 3: e$

$\begin{array}{l} 4: f \\ 4: c \end{array} | 4: f$

$\begin{array}{l} 4: c \end{array} | 4: c$

$\begin{array}{l} 5: b \end{array} | 5: b$

$\begin{array}{l} 6: g \end{array} | 6: g$

$\begin{array}{l} 7: d \\ 7: e \end{array} | 7: d$

$\begin{array}{l} 7: e \\ 8: f \end{array} | 7: e$

$\begin{array}{l} 8: f \\ 8: c \end{array} | 8: f$

$\begin{array}{l} 8: c \end{array} | 8: c$

Eintrag  $\hat{=}$  Runde: Knoten