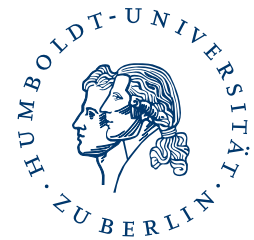
Graphalgorithmen

Johannes Köbler



Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

SS 2021

Färben von Graphen

Definition

- Eine Abbildung $f\colon V \to \{1, \ldots, k\}$ heißt k-Färbung (oder einfach Färbung) von G, wenn $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$ gilt
- In diesem Fall heißt G k-färbbar
- Die chromatische Zahl von G ist

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}$$

Beispiel

$$\chi(E_n) = 1,\ \chi(K_{n,m}) = 2,\ \chi(K_n) = n,$$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade} \\ 3, & \text{sonst} \end{cases}$$

Färben von Graphen

- Ein wichtiges Entscheidungsproblem ist, ob ein gegebener Graph k-färbbar ist
- Dieses Problem ist für jedes feste $k \geq 3$ schwierig

k-Färbbarkeit (k-Coloring):

Gegeben: Ein Graph G

Gefragt: Ist G k-färbbar?

Satz

k-Coloring ist für $k \geq 3$ NP-vollständig.

Färben von Graphen

Das folgende Lemma setzt die chromatische Zahl $\chi(G)$ in Beziehung zur Stabilitätszahl $\alpha(G)$

Lemma

$n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1.$

Beweis.

- Sei G ein Graph und sei c eine $\chi(G)$-Färbung von G
- Da dann die Mengen $S_i = \{u \in V : c(u) = i\}$, $i = 1, \ldots, \chi(G)$, stabil sind, folgt $\|S_i\| \leq \alpha(G)$
- Somit gilt

$$n = \sum_{i=1}^{\chi(G)} \|S_i\| \leq \chi(G)\alpha(G)$$

Färben von Graphen

Lemma

$n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$.

Beweis (Fortsetzung).

- Für den Beweis von $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$ sei S eine stabile Menge in G mit $\|S\| = \alpha(G)$
- Dann ist $G - S$ k-färbbar für ein $k \leq n - \|S\|$
- Da wir alle Knoten in S mit der Farbe $k + 1$ färben können, folgt $\chi(G) \leq k + 1 \leq n - \alpha(G) + 1$

□

Beide Abschätzungen sind scharf, können andererseits aber auch beliebig schlecht werden

Färben von Graphen

Lemma

$\binom{\chi(G)}{2} \leq m$ und somit $\chi(G) \leq {}^1\!/_2 + \sqrt{2m + {}^1\!/_4}$

Beweis.

Zwischen je zwei Farbklassen einer optimalen Färbung muss es mindestens eine Kante geben □

Die chromatische Zahl steht auch in Beziehung zur Cliquenzahl $\omega(G)$ und zum Maximalgrad $\Delta(G)$

Lemma

$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Färben von Graphen

Lemma

$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Beweis.

- Die erste Ungleichung folgt, da die Knoten einer größten Clique unterschiedliche Farben erhalten müssen
- Um die zweite Ungleichung zu erhalten, betrachten wir den

Algorithmus `greedy-color`

```
1   input ein Graph G = (V, E) mit V = {v_1, ..., v_n}
2   c(v_1) := 1
3   for i := 2 to n do
4     F_i := {c(v_j) : j < i, v_j ∈ N(v_i)}
5     c(v_i) := min{k ≥ 1 : k ∉ F_i}
```

- Da in Zeile 5 für die Farbe $c(v_i)$ von v_i nur $\|F_i\| \leq \Delta(G)$ Farben verboten sind, gilt $c(v_i) \leq \Delta(G) + 1$

□

Färben von planaren Graphen

- Ein Graph G heißt planar, wenn er so in die Ebene einbettbar ist, dass sich zwei verschiedene Kanten höchstens in ihren Endpunkten berühren
- Dabei werden die Knoten von G als Punkte und die Kanten von G als Verbindungslinien (genauer: Jordankurven) zwischen den zugehörigen Endpunkten dargestellt
- Bereits im 19. Jahrhundert wurde die Frage aufgeworfen, wie viele Farben höchstens benötigt werden, um eine Landkarte so zu färben, dass aneinander grenzende Länder unterschiedliche Farben erhalten
- Offensichtlich lässt sich eine Landkarte in einen planaren Graphen transformieren, indem man für jedes Land einen Knoten zeichnet und benachbarte Länder durch eine Kante verbindet
- Länder, die sich nur in einem Punkt berühren, gelten dabei nicht als benachbart

Färben von planaren Graphen

- Die Vermutung, dass 4 Farben ausreichen, wurde 1878 von Kempe „bewiesen“ und erst 1890 entdeckte Heawood einen Fehler in Kempes „Beweis“
- Übrig blieb der 5-Farben-Satz
- Der 4-Farben-Satz wurde erst 1976 von Appel und Haken bewiesen
- Hierbei handelt es sich jedoch nicht um einen Beweis im klassischen Sinne, da zur Überprüfung der vielen auftretenden Spezialfälle Computer benötigt werden

Satz (Appel, Haken 1976)

Jeder planare Graph ist 4-färbbar

Färben von planaren Graphen

Satz (Appel, Haken 1976)

Jeder planare Graph ist 4-färbbar

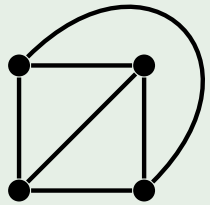
- Aus dem Beweis des 4-Farben-Satzes von Appel und Haken lässt sich ein 4-Färbungsalgorithmus für planare Graphen mit einer Laufzeit von $\mathcal{O}(n^4)$ gewinnen
- Im Jahr 1997 fanden Robertson, Sanders, Seymour und Thomas einen einfacheren Beweis für den 4-Farben-Satz, welcher zwar einen deutlich schnelleren $\mathcal{O}(n^2)$ Algorithmus liefert, aber ebenfalls nur mit Computer-Unterstützung verifizierbar ist

Färben von planaren Graphen

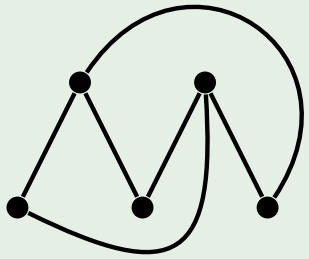
Beispiel

Wie die folgenden Einbettungen von K_4 und $K_{2,3}$ in die Ebene zeigen, sind diese Graphen planar

K_4:



$K_{2,3}$:



◁

- Zur Beantwortung der Frage, ob auch K_5 und $K_{3,3}$ planar sind, betrachten wir die Gebiete, die bei der Einbettung von (zusammenhängenden) Graphen in die Ebene entstehen
- Dabei gehören 2 Punkte zum selben Gebiet, falls es zwischen ihnen eine Verbindungslinie gibt, die keine Kante des eingebetten Graphen kreuzt oder berührt
- Nur eines dieser Gebiete ist unbeschränkt und dieses wird als äußeres Gebiet bezeichnet

Färben von planaren Graphen

- Die Anzahl der Gebiete von G bezeichnen wir mit $r(G)$ oder kurz mit r
- Die begrenzenden Kanten eines Gebietes g bilden den Rand von g
- Die Anzahl dieser Kanten bezeichnen wir mit $d(g)$, wobei Kanten, an die g von beiden Seiten grenzt, doppelt gezählt werden
- Der Rand $rand(g)$ eines Gebiets g ist die (zirkuläre) Folge aller an g grenzenden Kanten, wobei die Kanten auf dem Rand von g so durchlaufen werden, dass g „in Fahrtrichtung links“ liegt
- Dies hat zur Folge, dass jeder Knoten u, der über eine Kante e erreicht wird, über die im Uhrzeigersinn nächste Kante e' wieder verlassen wird
- Auf diese Weise erhalten wir für jeden Knoten u eine (zirkuläre) Ordnung π_u aller mit u inzidenten Kanten
- Wir nennen das Tripel $G' = (V, E, R)$ eine ebene Realisierung des Graphen $G = (V, E)$, falls es eine Einbettung von G in die Ebene gibt, deren Gebiete die Ränder in R haben
- In diesem Fall nennen wir $G' = (V, E, R)$ auch einen ebenen Graphen

Färben von planaren Graphen

- Führen zwei Einbettungen von G in die Ebene auf dieselbe Randmenge R, so werden sie als äquivalent angesehen
- Eine andere Möglichkeit, Einbettungen bis auf Äquivalenz kombinatorisch zu beschreiben, besteht darin, für jeden Knoten u die (zirkuläre) Ordnung π_u aller mit u inzidenten Kanten anzugeben
- Man nennt $\pi = \{\pi_u : u \in V\}$ ein Rotationssystem für G, falls es eine entsprechende Einbettung gibt
- Rotationssysteme haben den Vorteil, dass sie in Adjazenzlisten-darstellung ohne zusätzlichen Platzaufwand gespeichert werden können, indem man die zu u adjazenten Knoten gemäß π_u anordnet
- Ist G nicht zusammenhängend, so betten wir die Komponenten von G in die Ebene ein und fassen alle Ränder, die bei diesen Einbettungen entstehen, zu einer Randmenge R zusammen
- Da jede Kante zur Gesamtlänge $\sum_g d(g)$ aller Ränder den Wert 2 beiträgt (sie wird genau einmal in jeder Richtung durchlaufen), folgt

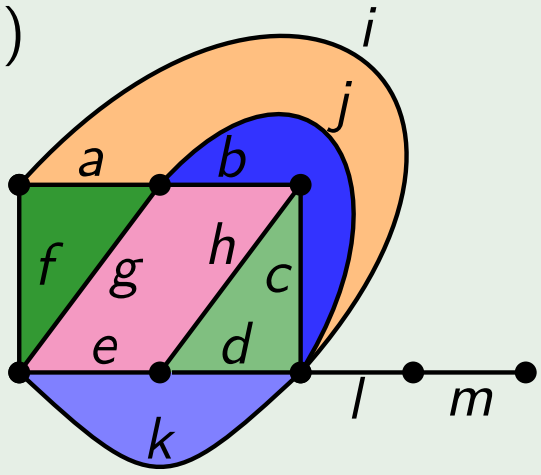
$$\sum_g d(g) = 2m(G)$$

Färben von planaren Graphen

Beispiel

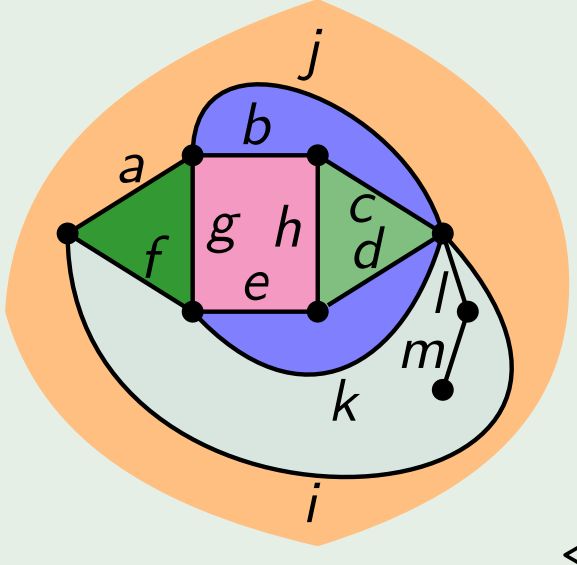
- Die nebenstehenden Einbettungen von $G = (V, E)$ in die Ebene haben 7 Gebiete mit den Rändern

$$R = \{(a, f, g), (a, j, i), (b, g, e, h), (b, c, j), (c, h, d), (d, e, k), (f, i, l, m, m, l, k)\}$$



- Der zugehörige ebene Graph ist $G' = (V, E, R)$ und das zugehörige Rotationssystem ist

$$\pi = \{(a, f, i), (a, j, b, g), (b, c, h), (e, k, f, g), (d, e, h), (c, j, i, l, k, d), (l, m), (m)\}$$



- Man beachte, dass sowohl in R als auch in π jede Kante genau zweimal vorkommt
- Anstelle von (zirkulären) Kantenfolgen kann man die Elemente von R und π natürlich auch durch entsprechende Knotenfolgen beschreiben

◁

Färben von planaren Graphen

Satz (Polyederformel von Euler, 1750)

Für einen zusammenhängenden ebenen Graphen $G = (V, E, R)$ gilt

$$n(G) - m(G) + r(G) = 2 \qquad (*)$$

Beweis durch Induktion über die Kantenzahl $m(G) = m$.

$m = 0$: Da G zusammenhängend ist, muss dann $n = 1$ sein

- Somit ist auch $r = 1$, also $(*)$ erfüllt

$m - 1 \rightsquigarrow m$: Sei G ein zusammenhängender ebener Graph mit m Kanten

- Ist G ein Baum, so entfernen wir ein Blatt und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen G' mit $n' = n - 1$ Knoten, $m' = m - 1$ Kanten und $r' = r$ Gebieten
- Nach IV folgt $n - m + r = (n - 1) - (m - 1) + r = n' - m' + r' = 2$
- Falls G kein Baum ist, entfernen wir eine Kante auf einem Kreis in G und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen G' mit $n' = n$ Knoten, $m' = m - 1$ Kanten und $r' = r - 1$ Gebieten
- Nach IV folgt $n - m + r = n - (m - 1) + (r - 1) = n' - m' + r' = 2$ □

Färben von planaren Graphen

Korollar. Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten

Dann ist $m \leq 3n - 6$. Falls G dreiecksfrei ist, gilt sogar $m \leq 2n - 4$.

Beweis.

- O.B.d.A. sei G zusammenhängend
- Wir betrachten eine beliebige planare Einbettung von G
- Da $n \geq 3$ ist, ist jedes Gebiet g von $d(g) \geq 3$ Kanten umgeben
- Daher ist $2m = i = \sum_g d(g) \geq 3r$ bzw. $r \leq 2m/3$
- Eulers Formel liefert

$$m = n + r - 2 \leq n + 2m/3 - 2,$$

  was $(1 - {}^2\!/_3)m \leq n - 2$ und somit $m \leq 3n - 6$ impliziert
- Wenn G dreiecksfrei ist, ist jedes Gebiet von $d(g) \geq 4$ Kanten umgeben
- Daher ist $2m = i = \sum_g d(g) \geq 4r$ bzw. $r \leq m/2$
- Eulers Formel liefert daher $m = n + r - 2 \leq n + m/2 - 2$, was $m/2 \leq n - 2$ und somit $m \leq 2n - 4$ impliziert

□

Färben von planaren Graphen

Korollar

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar

Beweis.

- Wegen $n(K_5) = 5$, also $3n(K_5) - 6 = 9$, und wegen $m(K_5) = \binom{5}{2} = 10$ gilt $m(K_5) \not\leq 3n(K_5) - 6$
- Wegen $n(K_{3,3}) = 6$, also $2n(K_{3,3}) - 4 = 8$, und wegen $m(K_{3,3}) = 3 \cdot 3 = 9$ gilt $m(K_{3,3}) \not\leq 2n(K_{3,3}) - 4$

□

Färben von planaren Graphen

Als weitere interessante Folgerung aus der Polyederformel können wir zeigen, dass jeder planare Graph einen Knoten v vom Grad $\deg(v) \leq 5$ hat

Korollar

Jeder planare Graph hat einen Minimalgrad $\delta \leq 5$

Beweis.

- Für $n \leq 6$ ist die Behauptung klar
- Für $n > 6$ impliziert die Annahme $\delta \geq 6$ die Ungleichung

$$m = \frac{1}{2} \sum_{u \in V} \deg(u) \geq \frac{1}{2} \sum_{u \in V} 6 = 3n,$$

was im Widerspruch zu $m \leq 3n - 6$ steht

□

Färben von planaren Graphen

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und seien $u, v \in V$

- Durch Fusion von u und v entsteht aus G der Graph $G_{uv} = (V - \{v\}, E')$ mit

$$E' = \{e \in E : v \notin e\} \cup \{\{u, v'\} \mid \{v, v'\} \in E - \{u, v\}\}$$

- Ist $e = \{u, v\}$ eine Kante von G (also $e \in E$), so sagen wir auch, G_{uv} entsteht aus G durch Kontraktion der Kante e
- Hat zudem v den Grad 2 mit $N_G(v) = \{u, w\}$, so sagen wir auch, G_{uv} entsteht aus G durch Überbrückung des Knotens v bzw. G aus G_{uv} durch Unterteilung der Kante $\{u, w\}$

Färben von planaren Graphen

Definition (Fortsetzung)

- G heißt zu H kontrahierbar, falls der Graph H aus einer isomorphen Kopie von G durch wiederholte Kontraktionen gewonnen werden kann
- In diesem Fall nennen wir den Graphen H auch eine Kontraktion von G bzw. den Graphen G eine Expansion von H
- H heißt zu G unterteilbar, falls G aus einer isomorphen Kopie von H durch wiederholte Unterteilungen von Kanten gewonnen werden kann
- In diesem Fall nennen wir G auch eine Unterteilung des Graphen H bzw. H eine Überbrückung des Graphen G

Färben von planaren Graphen

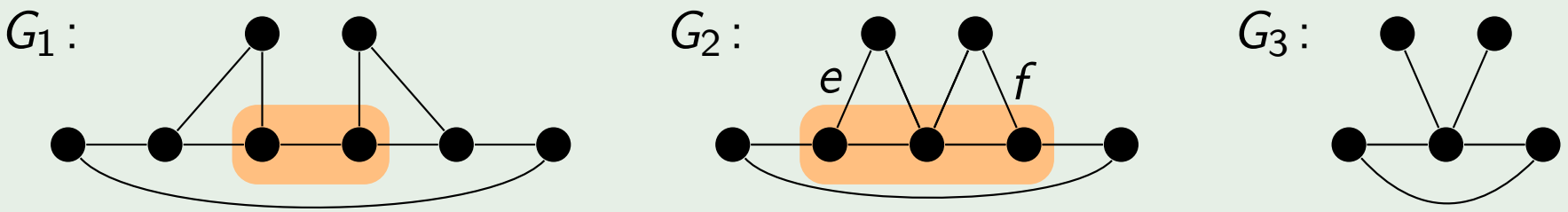
Definition (Schluss)

- H heißt Minor von G, wenn ein Teilgraph von G zu H kontrahierbar ist
- H heißt topologischer Minor von G, wenn ein Teilgraph G' von G eine Unterteilung von H ist (bzw. H eine Überbrückung von G' ist)
- G heißt H-frei, falls H kein Minor von G ist
- Für eine Menge $\mathcal{H}$ von Graphen heißt G $\mathcal{H}$-frei, falls kein $H \in \mathcal{H}$ ein Minor von G ist

Färben von planaren Graphen

Beispiel

Betrachte folgende Graphen:



- G_2 ist ein Minor von G_1, da G_2 durch Kontraktion der in G_1 umrandeten Kante entsteht; entsprechend ist G_3 ein Minor von G_2 und auch von G_1
- G_2 ist keine Unterteilung von G_3, da G_2 im Gegensatz zu G_3 Knoten vom Grad 3 hat
- Falls wir jedoch die beiden Kanten e und f aus G_2 entfernen, so ist der resultierende Teilgraph G_2' eine Unterteilung von G_3
- Somit ist G_3 ein topologischer Minor von G_2
- G_2 und G_3 sind aber keine topologischen Minoren von G_1, da G_2 und G_3 einen Knoten vom Grad 4 haben, aber G_1 nur Knoten vom Grad ≤ 3 $\triangleleft$

Färben von planaren Graphen

- Es ist klar, dass die Klasse $\mathcal{K}$ der planaren Graphen zwar unter Subgraphbildung, Kontraktion, Unterteilung und Überbrückung abgeschlossen ist, aber nicht unter Fusion
- Folglich ist jeder (topologische) Minor und jede Unterteilung eines planaren Graphen ebenfalls planar
- Nach Definition lässt sich jeder (topologische) Minor H von G aus einem zu G isomorphen Graphen durch wiederholte Anwendung folgender Operationen gewinnen:
  - Entfernen einer Kante oder eines Knotens
  - Kontraktion einer Kante (bzw. Überbrückung eines Knotens)
- Da die Kontraktionen (bzw. Überbrückungen) o.B.d.A. auch zuletzt ausgeführt werden können, gilt hiervon auch die Umkehrung
- Zudem ist leicht zu sehen, dass zwei Graphen G und H genau dann (topologische) Minoren voneinander sind, wenn sie isomorph sind

Färben von planaren Graphen

Satz (Kempe 1878, Heawood 1890)

Jeder planare Graph G ist 5-färbbar

Beweis durch Induktion über die Knotenzahl n von G.

$n = 1$: Klar

$n - 1 \rightsquigarrow n$: Sei G ein planarer Graph mit $n(G) = n$ Knoten

- Da G planar ist, existiert ein Knoten u mit $\deg(u) \leq 5$
- Nun konstruieren wir zu G wie folgt einen Minor G':
  - Im Fall $\deg(u) \leq 4$ sei $G' = G - u$, d.h. wir entfernen u aus G
  - Andernfalls hat u zwei Nachbarn v und w, die nicht durch eine Kante verbunden sind (andernfalls wäre K_5 ein Teilgraph von G)
  - In diesem Fall sei $G' = (G_{vu})_{vw}$, d.h. wir kontrahieren die beiden Kanten $\{u, v\}$ und $\{u, w\}$ zum Knoten v
- Da G' ein Minor von G ist, ist G' planar

Färben von planaren Graphen

Satz (Kempe 1878, Heawood 1890)

Jeder planare Graph G ist 5-färbbar

Beweis. (Fortsetzung)

- Da G' zudem höchstens $n-1$ Knoten hat, hat G' nach IV eine 5-Färbung c'
- Wir erweitern c' wie folgt zu einer 5-Färbung c von G
  - Im 2. Fall geben wir dem Knoten w die Farbe $c(w) = c'(v)$
  - Da nun in beiden Fällen die Nachbarn von u in G höchstens 4 verschiedene Farben haben, können wir auch u eine Farbe $c(u) \leq 5$ geben

□

Färben von planaren Graphen

- Kuratowski konnte 1930 beweisen, dass jeder nichtplanare Graph G den $K_{3,3}$ oder den K_5 als topologischen Minor enthält
- Für den Beweis benötigen wir folgende Notationen und ein Lemma

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Eine Menge $S \subseteq V$ heißt Separator in G, wenn es zwei Knoten $u, v \in V \setminus S$ gibt, zwischen denen in $G - S$ kein u-v-Weg existiert
- Ist $\|S\| = k$, so nennen wir S auch einen k-Separator zwischen u und v oder auch einen u-v-Separator der Größe k
- Für $0 \leq k < n(G)$ heißt G k-zusammenhängend, falls G keinen $(k-1)$-Separator hat
- Die größte Zahl $k < n(G)$, für die G k-zusammenhängend ist, heißt die Zusammenhangszahl von G und wird mit $\kappa(G)$ bezeichnet
- Ein Knoten $s \in V$ heißt Schnittknoten oder Artikulation von G, wenn es zwei Knoten $u, v \in V \setminus \{s\}$ gibt, so dass zwar $\{s\}$ ein u-v-Separator, aber $\emptyset$ kein u-v-Separator ist

Färben von planaren Graphen

Beispiel. Sei G ein Graph mit n Knoten

- $\kappa(G) = n - 1$ gilt genau dann, wenn $G = K_n$ ist
- $\kappa(G) \geq 1$ gilt genau dann, wenn G zusammenhängend und $n \geq 2$ ist
- $\kappa(G) = 1$ gilt genau dann, wenn G zusammenhängend ist und G mindestens einen Schnittknoten hat oder $G = K_2$ ist
- $\kappa(G) \geq 2$ gilt genau dann, wenn je 2 Knoten von G auf einem gemeinsamen Kreis liegen (siehe Übungen)

Färben von planaren Graphen

Lemma

Jeder Graph $G = (V, E)$, der nicht planar ist, hat einen

- 2-zusammenhängenden Untergraphen $U = (V', E')$ und einen
- 3-zusammenhängenden topologischen Minor $M = (V'', E'')$,

die minimal nicht planar sind, d.h. U und M sind nicht planar und für alle $e' \in E'$ und $e'' \in E''$ sind die Graphen $U - e'$ und $M - e''$ planar

Beweis.

- Wir entfernen zuerst solange Kanten und Knoten aus G, bis wir aus dem verbliebenen Teilgraphen $U = (V', E')$ keine weiteren Kanten oder Knoten entfernen können, ohne dass U planar wird
- U ist zusammenhängend, da andernfalls mindestens eine Komponente von U nicht planar ist und wir alle übrigen Komponenten entfernen könnten, ohne dass U planar wird
- U ist sogar 2-zusammenhängend

Färben von planaren Graphen

Beweis. (Fortsetzung)

- U ist sogar 2-zusammenhängend
- Sonst würde U einen Schnittknoten s enthalten und $U - s$ in $k \geq 2$ Komponenten $U[V_1], \ldots, U[V_k]$ zerfallen
- Dann wäre aber mindestens ein Teilgraph $T_i = U[V_i \cup \{s\}]$ nicht planar und wir könnten alle Knoten außerhalb von T_i entfernen, ohne dass U planar wird
- Um einen topologischen Minor M von G mit den behaupteten Eigenschaften zu erhalten, konstruieren wir zu U einen minimal nicht planaren topologischen Minor U', der 3-zusammenhängend ist oder weniger Knoten als U hat
- Indem wir diese Konstruktion wiederholen, erhalten wir schließlich M
- Falls U 3-zusammenhängend ist, ist $U' = U$

Färben von planaren Graphen

Beweis. (Schluss)

- Andernfalls gibt es in U einen 2-Separator $S = \{u, v\}$, d.h. $U - S$ zerfällt in $k \geq 2$ Komponenten $U[V_1], \ldots, U[V_k]$
- Betrachte die (2-zusammenhängenden) Graphen

$$G_i = U[V_i \cup \{u, v\}] \cup \{u, v\}, i = 1, \ldots, k$$

- Mindestens ein G_i ist nicht planar (z.B. G_1), da sonst U planar wäre
- Dann erhalten wir wie folgt einen zu G_1 isomorphen Graphen U' als topologischen Minor von $H = U[V_1 \cup V_2 \cup \{u, v\}]$ (und damit von U):
  - Wähle in $U[V_2 \cup \{u, v\}]$ einen beliebigen u-v-Pfad P,
  - entferne aus H alle Knoten und Kanten, die nicht auf P liegen und
  - überbrücke P zur Kante $\{u, v\}$
- Zudem hat U' weniger Knoten als U und ist wie U minimal nicht planar

□

Färben von planaren Graphen

Definition. Sei G ein Graph und sei K ein Kreis in G

- Ein Teilgraph B von G heißt Brücke von K in G, falls
  - B nur aus einer Kante besteht, die zwei Knoten von K verbindet und nicht auf K liegt, oder
  - $B - K$ eine Komponente von $G - K$ ist und B aus $B - K$ durch Hinzufügen aller Kanten zwischen $B - K$ und K (und der zugehörigen Endpunkte auf K) entsteht
- Brücken, die nur aus einer Kante bestehen, werden auch als Sehnen von K bezeichnet

Färben von planaren Graphen

Definition (Fortsetzung)

- Die Knoten von B, die auf K liegen, heißen Kontaktpunkte von B
- Zwei Brücken B und B' von K heißen inkompatibel, falls
  - B Kontaktpunkte u, v und B' Kontaktpunkte u', v' hat, so dass diese vier Punkte in der Reihenfolge u, u', v, v' auf K liegen, oder
  - B und B' mindestens 3 gemeinsame Kontaktpunkte haben

Es ist leicht zu sehen, dass in einem planaren Graphen kein Kreis mehr als zwei inkompatible Brücken haben kann

Färben von planaren Graphen

Satz. (Kuratowski 1930)

Für einen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) G ist planar

(ii) G enthält weder den $K_{3,3}$ noch den K_5 als topologischen Minor

Beweis.

- Die Implikation von (i) nach (ii) folgt aus der Abgeschlossenheit der planaren Graphen unter (topologischer) Minorenbildung
- Die Implikation von $ii)$ nach $i)$ zeigen wir durch Kontraposition
- Sei also $G = (V, E)$ nicht planar
- Dann hat G nach obigem Lemma einen 3-zusammenhängenden nicht planaren topologischen Minor $M = (V', E')$, so dass $M - e'$ für jede Kante $e' \in E'$ planar ist
- Wir entfernen eine beliebige Kante $e' = \{a_0, b_0\}$ aus M
- Dann ist $M - e'$ planar

Färben von planaren Graphen

Beweis. (Fortsetzung)

- Da $M - e'$ 2-zusammenhängend ist, gibt es in $M - e'$ einen Kreis K durch die beiden Knoten a_0 und b_0 (siehe Übungen)
- Wir wählen K zusammen mit einer ebenen Realisierung H' von $M - e'$ so, dass K möglichst viele Gebiete in H' einschließt
- Für zwei Knoten a, b auf K bezeichnen wir mit $K[a, b]$ die Menge aller Knoten, die in H' auf dem Bogen von a nach b (im Uhrzeigersinn) auf K liegen
- Zudem sei $K[a, b) = K[a, b] \setminus \{b\}$; die Mengen $K(a, b)$ und $K(a, b]$ sind analog definiert
- Die Kanten jeder Brücke B von K in $M - e'$ verlaufen in H' entweder alle innerhalb oder alle außerhalb von K
- Im ersten Fall nennen wir B eine innere Brücke und im zweiten eine äußere Brücke

Färben von planaren Graphen

Beweis. (Fortsetzung)

- Es ist klar, dass K in H' mindestens eine innere und mindestens eine äußere Brücke haben muss (sonst könnten wir e' zu H' hinzufügen)
- Zudem hat jede äußere Brücke B genau zwei Kontaktpunkte: einen Knoten $u \in K(a_0, b_0)$ und einen Knoten $v \in K(b_0, a_0)$
- Andernfalls hätte B nämlich mindestens 2 Kontaktpunkte auf $K[a_0, b_0]$ oder auf $K[b_0, a_0]$
- Daher könnten wir K zu einem Kreis K' erweitern, der in H' mehr Gebiete einschließt (bzw. ausschließt) als K, was der Wahl von K und H' widerspricht
- Da M 3-zusammenhängend ist, muss B zudem eine Sehne $\{u, v\}$ sein
- K hat in M außer den Brücken in $M - e'$ noch zusätzlich die Brücke e'
- Wir wählen nun eine innere Brücke B, die sowohl zu e' als auch zu mindestens einer äußeren Brücke $e'' = \{a_1, b_1\}$ inkompatibel ist

Färben von planaren Graphen

Beweis. (Fortsetzung)

- Eine solche Brücke muss es geben, da wir sonst alle mit e' inkompatiblen inneren Brücken nach außen klappen und e' als innere Brücke hinzunehmen könnten, ohne die Planarität zu verletzen
- Wir benutzen K und die drei Brücken e', e'' und B, um eine Unterteilung des $K_{3,3}$ oder des K_5 in M zu finden
- Hierzu geben wir entweder
  - zwei disjunkte Mengen $A_1, A_2 \subseteq V'$ mit jeweils 3 Knoten an, so dass 9 knotendisjunkte Pfade mit je einem Endpunkt $a \in A_1$ und einem Endpunkt $b \in A_2$ existieren, oder
  - wir geben eine Menge $A \subseteq V'$ mit fünf Knoten an, so dass 10 knotendisjunkte Pfade mit je zwei Endpunkten $a, b \in A$ existieren
- Da e' und e'' inkompatibel sind, können wir annehmen, dass die vier Knoten a_0, a_1, b_0, b_1 in dieser Reihenfolge auf K liegen

Färben von planaren Graphen

Beweis. (Fortsetzung)

Fall 1: B hat einen Kontaktpunkt $k_1 \notin \{a_0, a_1, b_0, b_1\}$

- Aus Symmetriegründen können wir $k_1 \in K(a_0, a_1)$ annehmen
- Da B weder zu e' noch zu e'' kompatibel ist, hat B weitere Kontaktpunkte $k_2 \in K(b_0, a_0)$ und $k_3 \in K(a_1, b_1)$, wobei $k_2 = k_3$ sein kann

Fall 1a: Ein Knoten $k_i \in \{k_2, k_3\}$ liegt auf dem Bogen $K(b_0, b_1)$

- In diesem Fall existieren 9 knotendisjunkte Pfade zwischen $\{a_0, a_1, k_i\}$ und $\{b_0, b_1, k_1\}$

Fall 1b: $K(b_0, b_1) \cap \{k_2, k_3\} = \emptyset$

- In diesem Fall ist $k_2 \in K[b_1, a_0)$ und $k_3 \in K(a_1, b_0]$
- Dann gibt es in B einen Knoten u, von dem aus 3 knotendisjunkte Pfade zu $\{k_1, k_2, k_3\}$ existieren
- Folglich gibt es 9 knotendisjunkte Pfade zwischen $\{a_0, a_1, u\}$ und $\{k_1, k_2, k_3\}$

Beweis. (Fortsetzung)

Fall 2: Alle Kontaktpunkte von B liegen in der Menge $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$

- Da B inkompatibel zu e' und e'' ist, müssen in diesem Fall alle vier Knoten a_0, a_1, b_0, b_1 zu B gehören
- Sei P_0 ein a_0-b_0-Pfad in B und sei P_1 ein a_1-b_1-Pfad in B
- Sei u der erste Knoten auf P_0, der auch auf P_1 liegt und sei v der letzte solche Knoten

Fall 2a: $u = v$

- Dann gibt es in B vier knotendisjunkte Pfade von u zu den vier Knoten a_0, a_1, b_0, b_1
- Somit existieren in M 10 knotendisjunkte Pfade zwischen den Knoten u, a_0, a_1, b_0, b_1

Färben von planaren Graphen

Beweis. (Schluss)

Fall 2: Alle Kontaktpunkte von B liegen in der Menge $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$

- Da B inkompatibel zu e' und e'' ist, müssen in diesem Fall alle vier Knoten a_0, a_1, b_0, b_1 zu B gehören
- Sei P_0 ein a_0-b_0-Pfad in B und sei P_1 ein a_1-b_1-Pfad in B
- Sei u der erste Knoten auf P_0, der auch auf P_1 liegt und sei v der letzte solche Knoten

Fall 2b: $u \neq v$

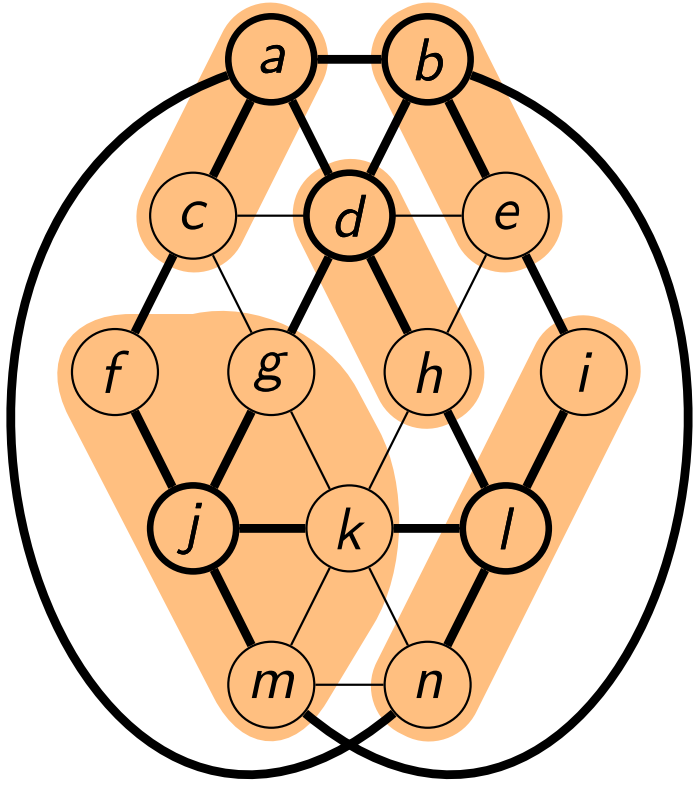
- Durch u und v wird der Pfad P_1 in drei Teilpfade P_{xu}, P_{uv} und P_{vy} unterteilt, wobei die Indizes die Endpunkte bezeichnen und $\{x, y\} = \{a_1, b_1\}$ ist
- Somit gibt es in B drei Pfade zwischen u und jedem Knoten in $\{a_0, v, x\}$ und zwei Pfade zwischen v und jedem Knoten in $\{b_0, y\}$, die alle 5 knotendisjunkt sind
- Folglich gibt es in M 9 knotendisjunkte Pfade zwischen $\{a_0, v, x\}$ und $\{b_0, y, u\}$

□

Färben von planaren Graphen

Beispiel

- Der nebenstehende Graph ist nicht planar, da wir den K_5 durch Kontraktion der farblich unterlegten Teilgraphen als Minor von G erhalten
- Alternativ lässt sich der K_5 auch als ein topologischer Minor von G erhalten, indem wir die dünnen Kanten entfernen und in dem resultierenden Teilgraphen alle Knoten vom Grad 2 überbrücken ◁



Färben von planaren Graphen

Eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz von Kuratowski ist folgende Charakterisierung der Klasse der planaren Graphen

Korollar (Wagner 1937)

Ein Graph G ist genau dann planar, wenn er $\{K_{3,3}, K_5\}$-frei ist

Beweis.

- Falls G planar ist, kann G weder den $K_{3,3}$ noch den K_5 als Minor enthalten
- Falls G weder den $K_{3,3}$ noch den K_5 als Minor enthält, ist G nach Kuratowski planar, da G diese Graphen dann auch nicht als topologische Minoren enthalten kann

□

Färben von planaren Graphen

Satz (Robertson und Seymour, 1983-2004)

Für jede Graphklasse $\mathcal{K}$, die unter Minorenbildung abgeschlossen ist, gibt es eine endliche Menge $\mathcal{H}$ von Graphen mit

$$\mathcal{K} = \{G : G \text{ ist } \mathcal{H}\text{-frei}\}$$

- Die Graphen in $\mathcal{H}$ sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und heißen verbotene Minoren für die Klasse $\mathcal{K}$
- Eine interessante Folgerung aus diesem Satz ist, dass jede unendliche Graphklasse zwei Graphen G und H enthält, so dass H ein Minor von G ist
- Das Problem, für zwei gegebene Graphen G und H zu entscheiden, ob H ein Minor von G ist, ist zwar NP-vollständig (da sich das Hamiltonkreisproblem darauf reduzieren lässt)

Färben von planaren Graphen

Für einen festen Graphen H ist das Problem aber effizient entscheidbar

Satz (Robertson und Seymour, 1995)

Für jeden Graphen H gibt es einen $O(n^3)$-zeitbeschränkten Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen G entscheidet, ob er H-frei ist

Korollar

Die Zugehörigkeit zu jeder unter Minorenbildung abgeschlossenen Graphklasse $\mathcal{K}$ ist in Zeit $O(n^3)$ entscheidbar

- Der Entscheidungsalgorithmus für $\mathcal{K}$ lässt sich allerdings nur angeben, wenn wir die verbotenen Minoren für $\mathcal{K}$ kennen
- Leider ist der Beweis des Satzes auf der vorigen Folie in dieser Hinsicht nicht konstruktiv
- Daher führt der Nachweis, dass $\mathcal{K}$ unter Minorenbildung abgeschlossen ist, nicht automatisch zu einem effizienten Erkennungsalgorithmus für $\mathcal{K}$

Färben von chordalen Graphen

- Chordale Graphen treten in vielen Anwendungen auf, z.B. sind alle Intervall- und alle Splitgraphen chordal
- Wir werden sehen, dass sich für chordale Graphen effizient eine optimale Knotenfärbung berechnen lässt

Definition

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt chordal oder trianguliert, wenn jeder Kreis $K = (u_1, \ldots, u_\ell, u_1)$ der Länge $\ell \geq 4$ in G mindestens eine Sehne hat

Färben von chordalen Graphen

- Ein Graph G ist also genau dann chordal, wenn er keinen induzierten Kreis der Länge $\ell \geq 4$ enthält (ein induzierter Kreis ist ein induzierter Teilgraph $G[V']$, $V' \subseteq V$, der ein Kreis ist)
- Dies zeigt, dass die Klasse der chordalen Graphen unter induzierter Teilgraphbildung abgeschlossen ist (aber nicht unter Teilgraphbildung)
- Jede solche Graphklasse $\mathcal{G}$ ist durch eine Familie von minimalen verbotenen induzierten Teilgraphen H_i charakterisiert, die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind
- Die Graphen H_i gehören also nicht zu $\mathcal{G}$, aber sobald wir einen Knoten daraus entfernen, erhalten wir einen Graphen in $\mathcal{G}$
- Die Klasse der chordalen Graphen hat die Familie der Kreise C_n der Länge $n \geq 4$ als verbotene induzierte Teilgraphen

Färben von chordalen Graphen

Definition

Ein x-y-Separator S heißt (inklusions-)minimal, wenn $S \setminus \{s\}$ für jedes $s \in S$ kein x-y-Separator ist

Lemma. Für einen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent:

1. G ist chordal
2. Jeder minimale x-y-Separator S in G ist eine Clique
3. Jedes Paar von nicht adjazenten Knoten x und y in G hat einen x-y-Separator S, der eine Clique ist

Beweis von 1 $\Rightarrow$ 2

- Angenommen, G hat einen minimalen x-y-Separator S, der zwei nicht adjazente Knoten u und v enthält
- Seien $G[V_1]$ und $G[V_2]$ die beiden Komponenten in $G - S$ mit $x \in V_1$ und $y \in V_2$

Färben von chordalen Graphen

Beweis von ❶ ⇒ ❷

- Angenommen, G hat einen minimalen x-y-Separator S, der zwei nicht adjazente Knoten u und v enthält
- Seien $G[V_1]$ und $G[V_2]$ die beiden Komponenten in $G - S$ mit $x \in V_1$ und $y \in V_2$
- Da S minimal ist, hat jeder der beiden Knoten u und v sowohl einen Nachbarn in V_1 als auch in V_2
- Betrachte die beiden Teilgraphen $G_i = G[V_i \cup \{u, v\}]$ $(i = 1, 2)$ und wähle jeweils einen kürzesten u-v-Pfad P_i in G_i
- Da deren Länge ≥ 2 ist, ist $K = P_1 \cup P_2$ ein Kreis der Länge ≥ 4
- Nach Konstruktion von K ist zudem klar, dass K keine Sehnen in G hat

Färben von chordalen Graphen

Lemma

Für einen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent

1. G ist chordal
2. Jeder minimale x-y-Separator S in G ist eine Clique
3. Jedes Paar von nicht adjazenten Knoten x und y in G hat einen x-y-Separator S, der eine Clique ist

Beweis von 2 $\Rightarrow$ 3

Klar, da je zwei nicht adjazente Knoten x und y einen x-y-Separator S haben, und S eine Clique ist, wenn wir S inklusionsminimal wählen

Färben von chordalen Graphen

Lemma

Für einen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent

1. G ist chordal
2. Jeder minimale x-y-Separator S in G ist eine Clique
3. Jedes Paar von nicht adjazenten Knoten x und y in G hat einen x-y-Separator S, der eine Clique ist

Beweis von 3 $\Rightarrow$ 1

- Angenommen, G ist nicht chordal
- Dann gibt es in G einen induzierten Kreis K der Länge ≥ 4
- Seien x und y zwei beliebige nicht adjazente Knoten auf K und sei S ein x-y-Separator in G
- Dann muss S mindestens zwei nicht adjazente Knoten aus K enthalten

Färben von chordalen Graphen

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $k \geq 0$

Ein Knoten $u \in V$ vom Grad k heißt k-simplizial (oder einfach simplizial), wenn alle Nachbarn von u paarweise adjazent sind

- Zusammenhängende chordale Graphen können als eine Verallgemeinerung von Bäumen aufgefasst werden
- Ein Graph ist ein Baum, wenn er aus K_1 durch sukzessives Hinzufügen von 1-simplizialen Knoten erzeugt werden kann
- Entsprechend heißt G k-Baum, wenn G aus K_k durch sukz. Hinzufügen von k-simplizialen Knoten erzeugt werden kann

Färben von chordalen Graphen

- Wir werden sehen, dass ein zusammenhängender Graph genau dann chordal ist, wenn er aus K_1 durch sukzessives Hinzufügen von simplizialen Knoten erzeugt werden kann
- Äquivalent hierzu ist, dass G durch sukzessives Entfernen von simplizialen Knoten auf einen isolierten Knoten reduziert werden kann

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph

Eine lineare Ordnung $(u_1, \ldots, u_n)$ auf V heißt perfekte Eliminationsordnung (PEO) von G, wenn u_i für $i = 1, \ldots, n$ simplizial in $G[u_1, \ldots, u_i]$ ist

- Wir eliminieren die Knoten von G also in der Reihenfolge $u_n, \ldots, u_2, u_1$
- Es ist klar dass der K_n alle $n!$ lineare Ordnungen auf V als PEO hat
- Das folgende Lemma verallgemeinert die bekannte Tatsache, dass jeder nicht vollständige Baum T (also $T \notin \{K_1, K_2\}$) mindestens zwei nicht adjazente Blätter hat

Färben von chordalen Graphen

Lemma

Jeder nicht vollständige chordale Graph $G = (V, E)$ besitzt mindestens zwei simpliziale Knoten, die nicht adjazent sind

Beweis durch Induktion über die Knotenzahl n von G.

- Für $n \leq 2$ (IA) ist die Behauptung klar
- Für den IS sei $n(G) \geq 3$
- Da G nicht vollständig ist, enthält G zwei nichtadjazente Knoten x_1 und x_2
- Sei S ein minimaler x_1-x_2-Separator der Größe $k \geq 0$
- Im Fall $k > 0$ ist S nach obigem Lemma eine Clique in G
- Seien $G[V_1]$ und $G[V_2]$ die beiden Komponenten von $G - S$ mit $x_i \in V_i$
- Wir zeigen die Existenz zweier simplizialer Knoten $s_i \in V_i$, $i = 1, 2$

Färben von chordalen Graphen

Beweis (Fortsetzung)

- Betrachte die Teilgraphen $G_i = G[V_i \cup S]$
- Da G_i chordal ist und weniger als n Knoten hat, ist G_i nach IV entweder eine Clique oder G_i enthält mindestens zwei nicht adjazente simpliziale Knoten y_i, z_i
- Falls G_i eine Clique ist, ist $s_i = x_i$ simplizial in G_i, und da x_i keine Nachbarn außerhalb von $V_i \cup S$ hat, ist s_i dann auch simplizial in G
- Ist G_i keine Clique, kann höchstens einer der beiden Knoten y_i, z_i zu S gehören (da S im Fall $S \neq \emptyset$ eine Clique und $\{y_i, z_i\} \notin E$ ist)
- O.B.d.A. sei $y_i \in V_i$; dann hat $s_i = y_i$ keine Nachbarn außerhalb von $V_i \cup S$ und somit ist s_i auch simplizial in G

□

Färben von chordalen Graphen

Satz

Ein Graph ist genau dann chordal, wenn er eine PEO hat

Beweis.

- Falls G chordal ist, lässt sich eine PEO gemäß obigem Lemma bestimmen, indem wir für $i = n, \ldots, 2$ sukzessive einen simplizialen Knoten u_i in $G - \{u_{i+1}, \ldots, u_n\}$ wählen
- Für die umgekehrte Richtung sei $(u_1, \ldots, u_n)$ eine PEO von G
- Wir zeigen induktiv, dass $G_i = G[u_1, \ldots, u_i]$ chordal ist
- Für $i \leq 3$ (IA) ist das klar
- Für den IS ($i \geq 4$) benutzen wir, dass u_i simplizial in G_i ist
- Daher enthält jeder Kreis K der Länge ≥ 4 in G_i, auf dem u_i liegt, eine Sehne zwischen den beiden Kreisnachbarn von u_i
- Also ist mit G_{i-1} auch G_i chordal

□

Färben von chordalen Graphen

Korollar

Es gibt einen Polynomialzeitalgorithmus A, der für einen gegebenen Graphen G eine PEO berechnet, falls G chordal ist, und andernfalls einen induzierten Kreis der Länge ≥ 4 ausgibt

Beweis.

- A versucht wie im Beweis von obigem Satz eine PEO zu bestimmen
- Stellt sich heraus, dass $G_i = G - \{u_{i+1}, \ldots, u_n\}$ keinen simplizialen Knoten u_i hat, so ist G_i nicht chordal
- Daher gibt es in G_i zwei nicht adjazente Knoten x und y, für die kein x-y-Separator eine Clique ist
- Berechnen wir für x und y einen beliebigen minimalen x-y-Separator S, so ist S keine Clique
- Wie im Beweis von ❶ $\Rightarrow$ ❷ können wir dann einen induzierten Kreis K der Länge ≥ 4 in G_i konstruieren
- Da G_i ein induzierter Teilgraph von G ist, ist K auch ein induzierter Kreis in G □

Färben von chordalen Graphen

Algorithmus `chordal-color`(V, E)

1 berechne eine PEO $(u_1, \ldots, u_n)$ für $G = (V, E)$
2 starte `greedy-color` mit der Knotenfolge $(u_1, \ldots, u_n)$

Satz

Für einen gegebenen chordalen Graphen $G = (V, E)$ berechnet `chordal-color` eine k-Färbung c von G mit $k = \chi(G) = \omega(G)$

Beweis.

- Sei k die größte von `chordal-color` zugewiesene Farbe und sei u_i ein beliebiger Knoten mit $c(u_i) = k$
- Da $(u_1, \ldots, u_n)$ eine PEO von G ist, ist u_i simplizial in $G[u_1, \ldots, u_i]$
- Somit bilden die Nachbarn u_j von u_i mit $j < i$ eine Clique und wegen $c(u_i) = k$ bilden sie zusammen mit u_i eine k-Clique
- Daher gilt $\chi(G) \leq k \leq \omega(G)$, woraus wegen $\omega(G) \leq \chi(G)$ die Behauptung folgt

□

Färben von chordalen Graphen

- Um `chordal-color` in Linearzeit zu implementieren, benötigen wir einen Linearzeit-Algorithmus zur Bestimmung einer PEO
- Rose, Tarjan und Lueker haben 1976 einen solchen Algorithmus angegeben, der auf lexikografischer Breitensuche (kurz LexBFS oder LBFS, engl. lexicographic breadth-first search) basiert
- Bevor wir diese Variante der Breitensuche vorstellen, gehen wir kurz auf verschiedene Ansätze zum Durchsuchen von Graphen ein
- Der folgende Algorithmus `GraphSearch(`V, E`)` startet eine Suche in einem beliebigen Knoten u und findet zunächst alle von u aus erreichbaren Knoten
- Danach wird solange von einem noch nicht erreichten Knoten eine neue Suche gestartet, bis alle Knoten erreicht wurden
- Die Menge der aktuellen Knoten wird dabei in einer Datenstruktur A gespeichert
- Genauer enthält A alle bereits entdeckten Knoten, die noch nicht abgearbeitet sind

Algorithmus GraphSearch(V, E)

```
1  R := ∅    // Menge der erreichten Knoten
2  L := ()    // Ausgabeliste
3  repeat
4     wähle u ∈ V\R    // u wurde neu entdeckt
5     R := R ∪ {u}
6     append(L, u)
7     parent(u) := ⊥
8     A := {u}    // Menge der aktuellen Knoten
9     while A ≠ ∅ do
10       wähle u aus A
11       if ∃v ∈ N(u)\R then
12          A := A ∪ {v}; R := R ∪ {v}    // v wurde neu entdeckt
13          append(L, v)
14          parent(v) := u
15       else entferne u aus A    // u wurde abgearbeitet
16 until R = V
17 return(L)
```

Färben von chordalen Graphen

- Der Algorithmus `GraphSearch`(V, E) findet in jedem Durchlauf der repeat-Schleife eine neue Komponente des Eingabegraphen $G = (V, E)$
- Dies bedeutet, dass alle Knoten, die zu einer Komponente gehören, konsekutiv in der Ausgabeliste $L = (u_1, \ldots, u_n)$ auftreten, wobei abgesehen vom ersten Knoten jeder Komponente jeder Knoten u_k einen Nachbarn u_i mit $i < k$ hat
- Die folgende Definition fasst diese Eigenschaften der Ausgabeliste zusammen

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Eine lineare Ordnung $(u_1, \ldots, u_n)$ auf V heißt Suchordnung (SO) von G, wenn für jedes Tripel $j < k < \ell$ gilt:

$$u_j \in N(u_\ell) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i < k : i \neq j \wedge u_i \in N(u_k)$$

Färben von chordalen Graphen

Satz

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gibt der Algorithmus `GraphSearch`(V, E) eine SO von G aus

Beweis.

- Ein Knoten u_k erhält nur dann den Wert $\texttt{parent}(u_k) = \perp$, wenn alle Knoten u_j mit $j < k$ bereits abgearbeitet sind und diese nur Nachbarn u_l mit $l < k$ hatten
- Falls also ein Vorgänger u_j von u_k mit einem Nachfolger u_l von u_k verbunden ist, liefert die `parent`-Funktion einen Nachbarn $u_i = \texttt{parent}(u_k)$ von u_k mit $i < k$
- Da $u_j \notin N(u_k)$ ist, gilt zusätzlich $i \neq j$

□

Färben von chordalen Graphen

- Die `parent`-Funktion liefert einen gerichteten Wald $W = (V, E_{\texttt{parent}})$, dessen Kantenmenge $E_{\texttt{parent}}$ aus allen Kanten der Form $(\texttt{parent}(v), v)$ mit $\texttt{parent}(v) \neq \perp$ besteht
- Die Kanten von W werden auch als Baumkanten (kurz B-Kanten) und W wird auch als Suchwald von $G = (V, E)$ bezeichnet
- Für jeden Knoten $v \in V$ gibt es genau eine Wurzel w in W, von der aus v in W erreichbar ist
- Der eindeutig bestimmte w-v-Pfad $P = (u_0, \ldots, u_l)$ in W mit $u_0 = w$ und $u_l = v$ lässt sich ausgehend von $u_l = v$ unter Verwendung der `parent`-Funktion mittels $u_{i-1} = \texttt{parent}(u_i)$ für $i = l, \ldots, 1$ berechnen
- P wird auch als parent-Pfad von v bezeichnet
- Es ist klar, dass 2 Knoten v und v' genau dann in einer Komponente von G liegen, wenn sie die gleiche Wurzel haben

Färben von chordalen Graphen

- Realisieren wir die Menge A der aktuellen Knoten als einen Keller S, so erhalten wir eine Suchstrategie, die als Tiefensuche (kurz DFS, engl. depth first search) bezeichnet wird
- Die Benutzung eines Kellers bewirkt, dass nach der Entdeckung eines neuen Knotens v unter den Nachbarn des aktuellen Knotens u die Suche zuerst bei den Nachbarn von v fortgesetzt wird, bevor die anderen Nachbarn von u an die Reihe kommen

Algorithmus GraphSearch(V, E)

```
1  R := ∅    // Menge der erreichten Knoten
2  L := ()    // Ausgabeliste
3  repeat
4     wähle u ∈ V\R    // u wurde neu entdeckt
5     R := R ∪ {u}
6     append(L, u)
7     parent(u) := ⊥
8     A := {u}    // Menge der aktuellen Knoten
9     while A ≠ ∅ do
10       wähle u aus A
11       if ∃v ∈ N(u)\R then
12          A := A ∪ {v}; R := R ∪ {v}    // v wurde neu entdeckt
13          append(L, v)
14          parent(v) := u
15       else entferne u aus A    // u wurde abgearbeitet
16 until R = V
17 return(L)
```

Algorithmus DFS(V, E)

```
1  R := ∅    // Menge der erreichten Knoten
2  L := ()   // Ausgabeliste
3  repeat
4     wähle u ∈ V\R    // u wurde neu entdeckt
5     R := R ∪ {u}
6     append(L, u)
7     parent(u) := ⊥
8     S := (u)    // Keller der aktuellen Knoten
9     while S ≠ () do
10       u := top(S)
11       if ∃v ∈ N(u)\R then
12          push(S, v); R := R ∪ {v}    // v wurde neu entdeckt
13          append(L, v)
14          parent(v) := u
15       else pop(S)    // u wurde abgearbeitet
16 until R = V
17 return(L)
```

Färben von chordalen Graphen

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Eine lineare Ordnung $(u_1, \ldots, u_n)$ auf V heißt Tiefensuchordnung (DFS-Ordnung oder kurz DO) von G, wenn für jedes Tripel $j < k < l$ gilt:

$$u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i : j < i < k \wedge u_i \in N(u_k)$$

Satz

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gibt der Algorithmus `DFS(`V, E`)` eine DO von G aus

Beweis.

Siehe Übungen □

Färben von chordalen Graphen

- Realisieren wir die Menge der abzuarbeitenden Knoten als eine Warteschlange Q, so findet der resultierende Algorithmus $\texttt{BFS}(V, E)$ einen kürzesten Weg vom Startknoten u zu allen von u aus erreichbaren Knoten
- Diese Suchstrategie wird als Breitensuche (kurz BFS, engl. breadth first search) bezeichnet
- Die Benutzung einer Warteschlange Q zur Speicherung der noch abzuarbeitenden Knoten bewirkt, dass alle Nachbarknoten v des aktuellen Knotens u vor den bisher noch nicht erreichten Nachbarn von v ausgegeben werden

Algorithmus BFS(V, E)

```
1  R := ∅    // Menge der erreichten Knoten
2  L := ()    // Ausgabeliste
3  repeat
4     wähle u ∈ V\R    // u wurde neu entdeckt
5     R := R ∪ {u}
6     parent(u) := ⊥
7     Q := (u)    // Warteschlange der aktuellen Knoten
8     while Q ≠ () do
9        u := dequeue(Q)    // u wird komplett abgearbeitet
10       append(L, u)
11       for all v ∈ N(u)\R do
12          enqueue(Q, v)    // v wurde neu entdeckt
13          parent(v) := u
14       R := R ∪ N(u)
15 until R = V
16 return(L)
```

Färben von chordalen Graphen

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Eine lineare Ordnung $(u_1, \ldots, u_n)$ auf V heißt Breitensuchordnung (BFS-Ordnung oder kurz BO) von G, wenn für jedes Tripel $j < k < l$ gilt:

$$u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i < j : u_i \in N(u_k)$$

Satz

$\texttt{BFS}(V, E)$ gibt für jeden Graphen $G = (V, E)$ eine BO von G aus

Beweis.

- Sei $u_j \in N(u_\ell) \setminus N(u_k)$ für ein Tripel $j < k < \ell$
- Da $\texttt{BFS}(V, E)$ eine SO von G ausgibt, wissen wir bereits, dass der Knoten $u_i = \texttt{parent}(u_k) \in N(u_k)$ einen Index $i < k$ hat
- Da u_k beim Abarbeiten von u_i und u_ℓ spätestens beim Abarbeiten von u_j zu Q hinzugefügt wird, muss u_i vor u_j abgearbeitet werden, da sonst u_ℓ vor u_k zu Q hinzugefügt würde

□

Färben von chordalen Graphen

- BFS-Ordnungen lassen sich anschaulich anhand der Adjazenzmatrix charakterisieren
- Sei $(u_1, \ldots, u_n)$ eine BO für $G = (V, E)$ und sei $A = (a_{ij})$ die Adjazenzmatrix von G mit $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{u_i, u_j\} \in E$
- Weiter seien $z_i = a_{i1} \ldots a_{i,i-1}$ die Präfixe der Zeilen von A, die unterhalb der Diagonale verlaufen
- Sind nun die ersten j Einträge $a_{k1} \ldots a_{kj}$ einer Zeile s_k Null, so muss dies auch für jede Zeile s_ℓ mit $\ell > k$ gelten, da im Fall $a_{\ell j} = 1$ der Knoten $u_j \in N(u_\ell) \setminus N(u_k)$ wäre und somit ein $i < j$ mit $a_{ki} = 1$ existieren müsste
- Dies bedeutet, dass s_ℓ mindestens so viele Nullen als Präfix hat wie z_k
- Es ist aber möglich, dass z_k bspw. mit 00010… beginnt und z_ℓ mit 00011…

Färben von chordalen Graphen

- Bei einer Breitensuche werden die noch nicht besuchten Nachbarn des aktuellen Knotens in beliebiger Reihenfolge zur Warteschlange hinzugefügt und auch wieder in dieser Reihenfolge entfernt
- Dagegen werden bei einer LexBFS die Knoten in der Warteschlange nachträglich umsortiert, falls dies notwendig ist, um eine LexBFS-Ordnung der Knoten zu erhalten
- Der Name von LexBFS rührt daher, dass die Knoten in einer Reihenfolge ausgegeben werden, die eine lexikalische Sortierung der Zeilenpräfixe z_i bewirkt
- Eine solche Sortierung kann auch bei einer gewöhnlichen Breitensuche auftreten, ist bei dieser aber nicht garantiert

Färben von chordalen Graphen

- Um einen Überblick über alle möglichen Fortsetzungen der aktuellen Liste L zu einer BO zu erhalten, bietet es sich an, Q als eine Warteschlange von Knotenmengen T_i zu realisieren (siehe Algorithmus BFS′)
- Innerhalb jeder Menge T_i können die Knoten dann eine beliebige Reihenfolge annehmen
- Entsprechend liefert die Prozedur Dequeue(Q) ein beliebiges Element aus der ersten Menge in Q zurück und entfernt dieses aus Q

Algorithmus $\mathtt{BFS}'(V, E)$

```
1  R := ∅    // Menge der erreichten Knoten
2  L := ()    // Ausgabeliste
3  repeat
4     wähle u ∈ V \ R;   R := R ∪ {u}
5     Q := ({u})    // Warteschlange von Knotenmengen
6     while Q ≠ () do
7        u := Dequeue(Q)    // u wird komplett abgearbeitet
8        append(L, u)
9        if N(u) ⊈ R then enqueue(Q, N(u) \ R)
10       R := R ∪ N(u)
11 until R = V
12 return(L)
```

Prozedur $\mathtt{Dequeue}(Q)$

```
1 entferne u aus first(Q)
2 if first(Q) = ∅ then dequeue(Q)
3 return(u)
```

Färben von chordalen Graphen

- Fassen wir die Menge $V \setminus R$ der noch nicht erreichten Knoten als Nachfolgerin der letzten Menge in Q auf, so trennt `BFS'` von dieser Restmenge in jedem Durchlauf der `while`-Schleife die Teilmenge $N(u) \setminus R$ ab und fügt sie Q im Fall $N(u) \setminus R \neq \emptyset$ hinzu
- Wie `BFS'` zerlegt auch `LexBFS` die Menge der noch nicht abgearbeiteten Knoten in eine Folge von Knotenmengen und speichert diese in Q
- Im Unterschied zu `BFS'` unterteilt `LexBFS` die Mengen in Q aber noch feiner und schränkt dadurch die möglichen Ausgabefolgen stärker ein
- Hierzu kann `LexBFS` im Gegensatz zu `BFS'` nicht nur die Restmenge $V \setminus R$, sondern beliebige Mengen in Q splitten

Färben von chordalen Graphen

Algorithmus `LexBFS`(V, E, u)

```
1 L := ()    // Ausgabeliste
2 Q := (V)    // Warteschlange von Knotenmengen
3 while Q ≠ () do
4    u := Dequeue(Q)    // u wird komplett abgearbeitet
5    append(L, u)
6    Splitqueue(Q, N(u))
7 return(L)
```

Prozedur `Splitqueue`(Q, S)

```
1 for T in Q with T ∩ S ∉ {∅, T} do
2    ersetze die Teilfolge (T) in Q durch (T ∩ S, T \ S)
```

Färben von chordalen Graphen

- Für eine effiziente Implementierung sollte die Schlange $Q = (T_1, \ldots, T_k)$ von Knotenmengen $T_i \subseteq V$ als doppelt verkettete Liste realisiert werden
- Zudem sollte die for-Schleife in der Prozedur `Splitqueue` durch eine Schleife über die Knoten v in der Adjazenzliste $S = N(u)$ ersetzt werden
- Weiterhin sollte für jeden Knoten v in der Adjazenzliste ein Zeiger auf die Menge T_i, die v enthält und auf seinen Eintrag in T_i gespeichert werden

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Eine lineare Ordnung $(u_1, \ldots, u_n)$ auf V heißt LexBFS-Ordnung (LBO) von G, wenn für jedes Tripel $j < k < l$ gilt:

$$u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i < j : u_i \in N(u_k) \setminus N(u_l)$$

Färben von chordalen Graphen

- Ob eine Ordnung $(u_1, \ldots, u_n)$ eine LBO ist, lässt sich wie folgt an der gemäß $(u_1, \ldots, u_n)$ geordneten Adjazenzmatrix A ablesen:
  - die Zeilenpräfixe $z_1, \ldots, z_n$ unter der Diagonalen müssen im folgenden Sinne lexikalisch sortiert sein:
  - entweder ist z_i ein Präfix von z_{i+1} oder z_i hat an der ersten Position, wo sich die beiden Strings unterscheiden, eine Eins
- Bringen wir also die Zeilenpräfixe z_i durch Anhängen von Einsen auf die Länge n, so sind sie lexikografisch sortiert: $z_i 1^{n-i+1} \geq z_{i+1} 1^{n-i}$
- Man erhält sogar eine lexikografische Ordnung auf den kompletten Zeilen von A, falls man die Diagonale auf 1 setzt und die Knoten in jeder Menge T_i von Q nach absteigendem Knotengrad in G sortiert

Färben von chordalen Graphen

Satz

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gibt der Algorithmus $\texttt{LexBFS}(V, E)$ eine LBO $(u_1, \ldots, u_n)$ von G aus

Beweis.

- Sei $A = (a_{ij})$ die Adjazenzmatrix von G mit $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{u_i, u_j\} \in E$
- Wir zeigen, dass $(u_1, \ldots, u_n)$ eine LBO ist
- Existiert nämlich im Fall $k < \ell$ eine Position $j < k$ mit $a_{kj} = 0$ und $a_{\ell j} = 1$, so muss es eine Position $i < j$ mit $a_{ki} = 1$ und $a_{\ell i} = 0$ geben
- Ansonsten wäre der Knoten u_ℓ spätestens beim Abarbeiten von u_j in eine Menge vor dem Knoten u_k sortiert worden und könnte daher nicht nach dem Knoten u_k ausgegeben werden

□

Färben von chordalen Graphen

Satz

Jede LBO für einen chordalen Graphen G ist eine PEO für G

Beweis.

- Sei $(u_1, \ldots, u_n)$ eine LBO für $G = (V, E)$ und sei $A = (a_{ij})$ die Adjazenzmatrix von G mit $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{u_i, u_j\} \in E$, wobei wir für a_{ij} auch $A[i, j]$ schreiben
- Wir zeigen, dass G nicht chordal ist, wenn u_i nicht simplizial in $G_i = G[u_1, \ldots, u_i]$ ist
- Falls u_i nicht simplizial in G_i ist, müssen Indizes $i_2 < i_1 < i =: i_0$ mit $A[i_0, i_1] = A[i_0, i_2] = 1$ und $A[i_1, i_2] = 0$ existieren
- Wegen $A[i_1, i_2] = 0$ und $A[i_0, i_2] = 1$ muss es einen Index $i_3 < i_2$ geben mit $A[i_1, i_3] = 1$ und $A[i_0, i_3] = 0$, wobei wir i_3 möglichst klein wählen
- Falls nun $A[i_2, i_3] = 1$ ist, haben wir einen induzierten Kreis $G[u_{i_0}, u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}] = (u_{i_0}, u_{i_1}, u_{i_3}, u_{i_2})$ der Länge 4 in G gefunden

Färben von chordalen Graphen

Beweis (Fortsetzung)

- Andernfalls muss es wegen $A[i_2, i_3] = 0$ und $A[i_1, i_3] = 1$ ein $i_4 < i_3$ mit $A[i_2, i_4] = 1$ und $A[i_1, i_4] = 0$ geben, wobei wir i_4 wieder minimal wählen
- Spätestens für $i_k = 1$ muss $A[i_{k-1}, i_k] = 1$ sein, da es kein $i_{k+1} < i_k$ gibt
- Somit erhalten wir eine Indexfolge $i_0 > i_1 > \cdots > i_k \geq 1$ mit
  1. $A[i_0, i_1] = A[i_j, i_{j+2}] = A[i_{k-1}, i_k] = 1$ für $j = 0, \ldots, k-2$
  2. $A[i_0, i_3] = A[i_j, i_{j+1}] = A[i_j, i_{j+3}] = A[i_{k-2}, i_{k-1}] = 0$, $1 \leq j \leq k-3$
  3. $A[i_j, \ell] = A[i_{j+1}, \ell]$ für $0 \leq j \leq k-4$ und $1 \leq \ell < i_{j+3}$

Färben von chordalen Graphen

Beweis. (Schluss)

- Die Eigenschaften ❶ und ❷ ergeben sich direkt aus der Konstruktion der Folge $u_{i_0}, u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}$
- Eigenschaft ❸ folgt aus der minimalen Wahl der Indizes $i_3, \ldots, i_k$ und impliziert für $r = 4, \ldots, k$ die Gleichungen

$$A[i_0, i_r] = A[i_1, i_r] = \cdots = A[i_{r-3}, i_r],$$

  indem wir $j = 0, \ldots, r-4$ und $\ell = i_r$ setzen
- Da zudem $A[i_{r-3}, i_r]$ gemäß Eigenschaft ❷ für $r = 3, \ldots, k$ den Wert 0 hat, folgt für alle Paare $0 \leq r < s \leq k$ die Äquivalenz

$$A[i_r, i_s] = 1 \Leftrightarrow s = r + 2 \text{ oder } s = r + 1 \wedge r \in \{0, k-1\}$$

- Folglich ist $G[u_{i_0}, \ldots, u_{i_k}]$ ein Kreis der Länge $k + 1 \geq 4$ □

Färben von chordalen Graphen

- Damit haben wir einen Linearzeitalgorithmus, der für chordale Graphen eine PEO berechnet
- Da auch `greedy-color` linear zeitbeschränkt ist, können wir den Algorithmus `chordal-color` in Linearzeit implementieren
- Diesen Algorithmus können wir noch so modifizieren, dass er zusammen mit der gefundenen k-Färbung
  - entweder eine Clique C der Größe k (als Zertifikat, dass $\chi(G) = k = \omega(G)$ ist)
  - oder einen induzierten Kreis der Länge ≥ 4 ausgibt (als Zertifikat, dass G nicht chordal ist)

Der Satz von Brooks

Satz (Brooks 1941)

Für einen zusammenhängenden Graphen G gilt $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ genau dann, wenn $G = K_n$ für ein $n \geq 1$ oder $G = C_n$ für ein ungerades $n \geq 3$ ist

Beweis.

- Es ist klar, dass die Graphen $G = K_n$ für $n \geq 1$ und $G = C_n$ für ungerades $n \geq 3$ die chromatische Zahl $\Delta(G) + 1$ haben
- Um zu zeigen, dass dies die einzigen zusammenhängenden Graphen mit $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ sind, betrachten wir verschiedene Fälle
- Falls G nicht regulär ist, können wir ausgehend von einem Knoten u_1 vom Grad $\deg_G(u_1) < \Delta(G)$ eine Suchordnung $(u_1, \ldots, u_n)$ berechnen und G greedy in der umgekehrten Reihenfolge $(u_n, \ldots, u_1)$ $\Delta(G)$-färben
- Dies ist möglich, da jeder Knoten u_i mit $i \geq 2$ zum Zeitpunkt der Berechnung von $c(u_i)$ noch einen ungefärbten Nachbar $\texttt{parent}(u_i)$ und u_1 einen Grad $\deg_G(u_1) < \Delta(G)$ hat

Der Satz von Brooks

Beweis des Satzes von Brooks (Fortsetzung)

- Falls G regulär, aber nicht 2-zusammenhängend ist, berechnen wir $\Delta(G)$-Färbungen c_i für die einzelnen Blöcke B_i von G
- Dies ist möglich, da jeder Block B_i mindestens einen Schnittknoten enthält und daher höchstens für ein $k < \Delta(G)$ k-regulär ist
- Die Färbungen c_i lassen sich ausgehend von einem beliebigen Wurzelblock des BC-Baums hin zu den Blattblöcken in eine $\Delta(G)$-Färbung c für G transformieren
- Hierzu müssen wir lediglich die Farben im aktuellen Block B_i so umbenennen, dass der Schnittknoten, der B_i mit seinem Elternblock verbindet, die vorgegebene Farbe erhält
- Es bleibt also der Fall, dass G d-regulär und $\kappa(G) \geq 2$ ist
- Der Fall $d = 2$ ist klar, da G ein Kreis sein muss
- Für den Fall $d \geq 3$ benutzen wir folgende Behauptung

Der Satz von Brooks

Behauptung. Sei $d \geq 3$ und sei $G \neq K_n$ ein d-regulär Graph mit $\kappa(G) \geq 2$.

Dann gibt es in G einen Knoten u_1, der zwei nicht-adjazente Nachbarn a und b hat, so dass $G - \{a, b\}$ zusammenhängend ist

Beweis des Satzes von Brooks (Schluss)

- Sei also u_1 ein Knoten, der zwei Nachbarn a und b mit $\{a, b\} \notin E$ hat, so dass $G - \{a, b\}$ zusammenhängend ist
- Durchsuchen wir den Graphen $G - \{a, b\}$ ausgehend vom Startknoten u_1, so erhalten wir eine Suchordnung $(u_1, \ldots, u_{n-2})$
- Färben wir G nun greedy mit der Knotenfolge $(a, b, u_{n-2}, \ldots, u_1)$, so erhalten wir eine d-Färbung c für G mit $c(a) = c(b) = 1$
- Zudem hat Knoten u_i, $i > 1$, einen Nachbarn u_j mit $j < i$, weshalb $c(u_i) \leq \deg(u_i) \leq d$ ist
- Zuletzt erhält auch u_1 eine Farbe $c(u_1) \leq d$, da die Nachbarn a und b von u_1 dieselbe Farbe haben □

Der Satz von Brooks

Behauptung. Sei $d \geq 3$ und sei $G \neq K_n$ ein d-regulär Graph mit $\kappa(G) \geq 2$.

Dann gibt es in G einen Knoten u_1, der zwei nicht-adjazente Nachbarn a und b hat, so dass $G - \{a, b\}$ zusammenhängend ist

Beweis der Behauptung

- Da $G \neq K_n$ ist, gibt es einen Knoten x, der zwei Nachbarn $y, z \in N(x)$ mit $\{y, z\} \notin E$ hat
- Falls $G - y$ 2-zusammenhängend ist, ist $G - \{y, z\}$ zusammenhängend und die Behauptung folgt für $u_1 = x$
- Ist $G - y$ nicht 2-zusammenhängend, d.h. $G - y$ hat mindestens zwei Blöcke, dann hat der BC-Baum T von $G - y$ mindestens zwei Blätter
- Da $\kappa(G) \geq 2$ ist, ist y in G zu mindestens einem Knoten in jedem Blatt von T benachbart, der kein Schnittknoten ist
- Wählen wir für a und b zwei dieser Knoten in verschiedenen Blättern, so ist $G - \{a, b\}$ zusammenhängend und somit die Behauptung für $u_1 = y$ bewiesen □

Kantenfärbungen

Neben der Frage, wieviele Farben eine Knotenfärbung eines Graphen benötigt, ist bei vielen Anwendungen auch die Anzahl der Farben für eine Kantenfärbung interessant

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $k \in \mathbb{N}$.

- Eine Abbildung $c\colon E \to \{1, \ldots, k\}$ heißt k-Kantenfärbung von G, wenn $c(e) \neq c(e')$ für alle $e \neq e' \in E$ mit $e \cap e' \neq \emptyset$ gilt
- In diesem Fall heißt G k-kantenfärbbar
- Die kantenchromatische Zahl oder der chromatische Index von G ist

$$\chi'(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : G \text{ ist } k\text{-kantenfärbbar}\}$$

- Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ heißt Matching in G, falls je zwei Kanten $e \neq e' \in M$ unabhängig sind, d.h. $e \cap e' = \emptyset$
- Die Matchingzahl von G ist

$$\mu(G) = \max\{|M| : M \text{ ist ein Matching in } G\}$$

Kantenfärbungen

- Eine k-Kantenfärbung c muss also jedem inzidenten Kantenpaar $e \neq e' \in E$ verschiedene Farben $c(e) \neq c(e')$ zuweisen
- Daher bildet jede Farbklasse

$$E_i = \{e \in E : c(e) = i\},\ i = 1, \ldots, k$$

ein Matching von G, d.h. c zerlegt E in k disjunkte Matchings E_i

- Umgekehrt liefert jede Zerlegung von E in k disjunkte Matchings eine k-Kantenfärbung von G

Kantenfärbungen

- Neben Graphen treten in manchen Anwendungen auch Multigraphen $G = (V, E)$ auf
- Diese können mehr als eine Kante zwischen zwei Knoten u und v haben, d.h. E ist eine Multimenge auf $\binom{V}{2}$
- Eine Multimenge A auf einer Grundmenge M lässt sich durch eine Funktion $v_A \colon M \to \mathbb{N}$ beschreiben, wobei $v_A(a)$ die Anzahl der Vorkommen des Elements a in A angibt
- Die Mächtigkeit von A ist $|A| = \sum_{a \in A} v_A(a)$
- Ist $G = (V, E)$ ein Multigraph, so gibt also die Funktion v_E für jedes Paar $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ die Anzahl $v_E(u, v)$ der Kanten zwischen den Endpunkten u und v in G an
- Dabei können wir einen Graphen $G = (V, E)$ auch als Multigraphen auffassen, der als Anzahlfunktion v_E die charakteristische Funktion $\chi_E \colon \binom{V}{2} \to \{0, 1\}$ von E verwendet (d.h. $\chi_E(e) = 1 \Leftrightarrow e \in E$)

Kantenfärbungen

- Wie bei Graphen gehen wir davon aus, dass jede Kante $e = \{u, v\}$ eines Multigraphen zwei verschiedene Endpunkte $u \neq v$ hat
- In einem Multigraphen $G = (V, E)$ gibt es genau $v_E(e) = v_E(u, v)$ Kanten zwischen zwei Knoten $u \neq v \in V$
- Die Zahl $v_E(e)$ wird auch als (Kanten-)Vielfachheit von e bezeichnet
- Ein wichtiger Parameter von G ist die maximale Kantenvielfachheit

  $$v(G) = \max_{e \in E} v_E(e),$$

  die auch als (Graph-)Vielfachheit von G bezeichnet wird
- Der Grad eines Knotens $u \in V$ ist $\deg_G(u) = \sum_{v \in N(u)} v_E(u, v)$ und der Maximalgrad von G ist wie üblich $\Delta(G) = \max_{u \in V} \deg_G(u)$

Kantenfärbungen

- Wir beschreiben eine k-Kantenfärbung für einen Multigraphen $G = (V, E)$ durch eine Funktion c, die jeder Kante $e \in \binom{V}{2}$ eine Menge $c(e) \subseteq \{1, \ldots, k\}$ von $|c(e)| = v_E(e)$ Farben zuordnet, so dass $c(e) \cap c(e') = \emptyset$ für alle $e \neq e' \in \binom{V}{2}$ mit $e \cap e' \neq \emptyset$ gilt

Beispiel

- Für einen Kreis C_n der Länge n gilt

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade,} \\ 3, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für den vollständigen Graphen K_n gilt

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1, & n \text{ gerade,} \\ n, & \text{sonst} \end{cases}$$

Kantenfärbungen

Das Kantenfärbungsproblem für (Multi-)Graphen lässt sich leicht auf das Knotenfärbungsproblem für Graphen reduzieren

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Multigraph mit $m \geq 1$ Kanten.

Der Kanten- oder Line-Graph von G ist der Graph $L(G) = (V', E')$ mit der Knotenmenge V', die $v_E(e)$ verschiedene Kopien $e^1, \ldots, e^{v_E(e)}$ jeder Kante $e \in \binom{V}{2}$ enthält, und der Kantenmenge $E' = \left\{\{e, e'\} \in \binom{V'}{2} : e \cap e' \neq \emptyset\right\}$

Ist $G = (V, E)$ ein Graph, so hat der Line-Graph $L(G) = (V', E')$ also die Knotenmenge $V' = E$, und $L(G)$ ist auch dann ein Graph, wenn G ein Multigraph ist

Kantenfärbungen

Die folgenden Beziehungen zwischen einem (Multi-)Graphen G und dem zugehörigen Line-Graphen $G' = L(G)$ lassen sich leicht verifizieren

Proposition

Für den Line-Graphen G' eines Multigraphen $G = (V, E)$ gilt:

1. $n(G') = m(G)$
2. $\chi(G') = \chi'(G)$
3. $\alpha(G') = \mu(G)$
4. $\omega(G') \geq \Delta(G)$
5. Für jede Kopie e^i einer Kante $e = \{u, v\}$ von G mit $v_E(e) \geq 1$ gilt

$$\deg_{G'}(e^i) = \deg_G(u) + \deg_G(v) - v_E(e) - 1$$

und somit ist $\Delta(G') \leq 2\Delta(G) - 2$

Kantenfärbungen

Damit erhalten wir aus den Abschätzungen

- $n(G')/\alpha(G') \leq \chi(G') \leq n(G') - \alpha(G') + 1$ und
- $\omega(G') \leq \chi(G') \leq \Delta(G') + 1$

für $G' = L(G)$ die folgenden Abschätzungen für $\chi'(G)$

Lemma

Für jeden Multigraphen G mit $m \geq 1$ Kanten gilt

- $m(G)/\mu(G) \leq \chi'(G) \leq m(G) - \mu(G) + 1$ und
- $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$

Korollar

Für jeden regulären Multigraphen mit einer ungeraden Knotenzahl n und $m \geq 1$ Kanten gilt $\chi' \geq \Delta + 1 \geq 3$

Beweis.

- Wegen $\mu \leq (n-1)/2$ und $m = n\Delta/2$ folgt $\chi' \geq m/\mu \geq n\Delta/(n-1) > \Delta$
- Da n ungerade und $m \geq 1$ ist, folgt $\Delta \geq 2$

□

Der Satz von Vizing

Wir geben nun einen effizienten Algorithmus zur Berechnung einer $(\Delta + 1)$-Kantenfärbung an; hierfür benötigen wir folgende Begriffe

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und c eine k-Kantenfärbung von G.

- Gelte $1 \leq i \neq j \leq k$ und sei $F \subseteq \{1, \ldots, k\}$
- Ein Nachbar v von u heißt F-Nachbar von u, wenn $c(u, v) \in F$ ist
- Im Fall $F = \{i\}$ nennen wir v auch den i-Nachbarn von u
- Die Farbe i ist frei an einem Knoten u (kurz $i \in \mathit{free}(u)$), falls u keinen i-Nachbarn hat
- Der Graph $G_{ij} = (V, E_{ij})$ mit $E_{ij} = \{e \in E \mid c(e) \in \{i, j\}\}$ heißt (i, j)-Subgraph von G
- Jede Komponente C von G_{ij} heißt (i, j)-Komponente von G
- Je nachdem ob C ein Pfad oder ein Kreis ist, nennen wir C auch einen (i, j)-Pfad bzw. (i, j)-Kreis in G (bzgl. c)

Der Satz von Vizing

- Man sieht leicht, dass jede (i,j)-Komponente C von G entweder ein Pfad der Länge $\ell \geq 0$ oder ein Kreis gerader Länge ist
- Zudem können wir aus c eine weitere k-Kantenfärbung c' von G gewinnen, indem wir die beiden Farben i und j entlang der Kanten von C vertauschen

Satz (Vizing 1964)

Für jeden Graphen G gilt $\chi'(G) \leq \min_{e \in E} \Delta(G-e) + 1 \leq \Delta(G) + 1$

Der Satz von Vizing

Satz (Vizing 1964)

Für jeden Graphen G gilt $\chi'(G) \leq \min_{e \in E} \Delta(G - e) + 1 \leq \Delta(G) + 1$

Beweis. Wir führen Induktion über die Kantenzahl m.

- Der Fall $m = 1$ (IA) ist klar
- Für den IS sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $m \geq 2$ Kanten und sei $k = \min_{e \in E} \Delta(G - e) + 1$
- Wir wählen eine beliebige Kante $e_1 = \{y_0, y_1\} \in E$, so dass für den Graphen $G' = G - e_1 = (V, E')$ die Gleichung $k = \Delta(G') + 1$ gilt
- Dann hat G' nach IV eine k-Kantenfärbung $c\colon\ E' \to \{1, \ldots, k\}$
- Da in G' zudem unter c an jedem Knoten u mindestens

  $$k - \deg_{G'}(u) \geq k - \Delta(G') = 1$$

  Farben frei sind, folgt $\mathit{free}(u) \neq \emptyset$ für alle $u \in V$
- Betrachte nun folgende Prozeduren `expand` und `recolor`

Prozedur expand(G, c, y_0, y_1)

```
1  ℓ := 1
2  wähle α_1 ∈ free(y_1)
3  while α_ℓ ∉ free(y_0) ∪ {α_1, ..., α_{ℓ-1}} do
4     sei y_{ℓ+1} der α_ℓ-Nachbar von y_0
5     wähle α_{ℓ+1} ∈ free(y_{ℓ+1})
6     ℓ := ℓ + 1
7  wähle 0 ≤ i < ℓ minimal mit α_ℓ ∈ free(y_0) ∪ {α_1, ..., α_i}
8  if i = 0 then          // α_ℓ ∈ free(y_0)
9     recolor(ℓ, α_ℓ)
10 else                   // α_ℓ = α_i für ein i ≥ 1
11    wähle eine Farbe α_0 ∈ free(y_0) und berechne den (α_0, α_i)-Pfad P mit
12    Startknoten y_ℓ und vertausche dabei die Farben α_0 und α_i entlang P
13    sei z der Endknoten von P      // z = y_ℓ ist möglich
14    case
15       z = y_0: recolor(i, α_i)
16       z = y_i: recolor(i, α_0)
17    else recolor(ℓ, α_0)
```

Der Satz von Vizing

Prozedur `recolor`(i, α)

1 **for** $j := 1$ **to** $i - 1$ **do** $c(y_0, y_j) := \alpha_j$
2 $c(y_0, y_i) := \alpha$

Beweis (Fortsetzung)

Wir verifizieren, dass c nach dem Aufruf von `expand`(G, c, y_0, y_1) eine k-Kantenfärbung von G ist:

Fall 1 ($\mathbf{i = 0}$):

- In diesem Fall gilt $\alpha_\ell \in \mathit{free}(y_0)$ und für $j = 1, \ldots, \ell$ gilt $\alpha_j \in \mathit{free}(y_j)$
- Daher kann `recolor`(ℓ, α_ℓ) die Kanten $\{y_0, y_j\}$ mit α_j färben

Fall 2 ($\mathbf{i > 0 \wedge z = y_0}$):

- P muss den Knoten $z = y_0$ über die Kante $\{y_0, y_{i+1}\}$ erreichen
- Da $\{y_0, y_{i+1}\}$ vor dem Vertauschen von α_0 und α_i auf dem Pfad P die Farbe α_i hat, hat sie danach die Farbe α_0
- Deshalb kann `recolor`(i, α_i) die Kanten $\{y_0, y_j\}$ für $j = 1, \ldots, i$ mit α_j färben

Der Satz von Vizing

Beweis (Schluss)

Fall 3 ($\mathbf{i > 0 \wedge z = y_i}$):

- Da $\alpha_i \in \mathit{free}(y_i) \cap \mathit{free}(y_\ell)$ ist, müssen die Endkanten von P mit α_0 gefärbt sein
- Nach Vertauschen von α_0 und α_i entlang P ist daher die Farbe α_0 an y_0 und y_i frei
- Deshalb kann $\texttt{recolor}(i, \alpha_0)$ für $j = 1, \ldots, i-1$ die Kante $\{y_0, y_j\}$ mit α_j und die Kante $\{y_0, y_i\}$ mit α_0 färben

Fall 4 ($\mathbf{i > 0 \wedge z \notin \{y_0, y_i\}}$):

- Durch Vertauschen von α_0 und α_i auf P wird die Farbe α_0 an y_ℓ frei
- Wegen $z \notin \{y_0, y_i\}$ bleibt die Farbe α_j für $j \in \{0, i\}$ an y_j frei
- Da für alle $j \in \{1, \ldots, \ell-1\} - \{i\}$ die Farbe α_j von α_0 und α_i verschieden ist, bleibt α_j sogar für alle $j = 0, \ldots, \ell-1$ an y_j frei
- Daher kann $\texttt{recolor}(\ell, \alpha_0)$ für $j = 1, \ldots, \ell-1$ die Kante $\{y_0, y_j\}$ mit α_j und die Kante $\{y_0, y_\ell\}$ mit α_0 färben $\square$

Der Satz von Vizing

- Da sich die Prozedur `expand` mit Hilfe geeigneter Datenstrukturen in Zeit $\mathcal{O}(n)$ implementieren lässt und diese Prozedur für jede Kante einmal aufgerufen wird, ergibt sich eine Gesamtlaufzeit von $\mathcal{O}(nm)$
- Wegen $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ kann $\chi'(G)$ nur einen der beiden Werte $\Delta(G)$ oder $\Delta(G) + 1$ annehmen
- Graphen G mit $\chi'(G) = \Delta(G)$ heißen Klasse 1 und Graphen G mit $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ heißen Klasse 2
- Neben den vollständigen Graphen K_n mit gerader Knotenzahl n sind alle Graphen G mit $\Delta(G) \leq 1$ und alle bipartiten Graphen Klasse 1
- Zudem sind alle planaren Graphen G mit $\Delta(G) \geq 7$ Klasse 1
- Für $2 \leq d \leq 5$ existieren planare Graphen G mit $\Delta(G) = d$, die Klasse 2 sind; für $d = 6$ ist dies offen
- Das Problem, für einen gegebenen Graphen G zu entscheiden, ob er Klasse 1 ist, ist NP-vollständig

Der Satz von Vizing

Der Satz von Vizing lässt sich wie folgt auf Multigraphen verallgemeinern

Satz (Vizing 1964)

Für jeden Multigraphen $G = (V, E)$ gilt
$\chi'(G) \leq \max_{u,v \in V}(\deg(u) + v_E(u, v)) \leq \Delta(G) + v(G)$

Beweis.

- Der Beweis folgt derselben Argumentation wie bei einfachen Graphen
- Wir müssen nur die Prozeduren `expand` und `recolor` entsprechend anpassen

□

Prozedur multiexpand(G, c, y_0, y_1)

```
1  ℓ := 1; Y := {y_1}
2  wähle α_1 ∈ free(y_1); used(y_1) := {α_1}
3  while α_ℓ ∉ free(y_0) ∪ {α_1, ..., α_{ℓ-1}} do
4     sei y_{ℓ+1} der α_ℓ-Nachbar von y_0;
5     if y_{ℓ+1} ∉ Y then Y := Y ∪ {y_{ℓ+1}}; used(y_{ℓ+1}) := ∅
6     wähle α_{ℓ+1} ∈ free(y_{ℓ+1}) \ used(y_{ℓ+1})
7     used(y_{ℓ+1}) := used(y_{ℓ+1}) ∪ {α_{ℓ+1}}
8     ℓ := ℓ + 1
9  wähle 0 ≤ i < ℓ minimal mit α_ℓ ∈ free(y_0) ∪ {α_1, ..., α_i}
10 if i = 0 then          // α_ℓ ∈ free(y_0)
11    multirecolor(ℓ, α_ℓ)
12 else                   // α_ℓ = α_i für ein i ≥ 1
13    wähle eine Farbe α_0 ∈ free(y_0) und berechne den (α_0, α_i)-Pfad P mit
14    Startknoten y_ℓ und vertausche dabei die Farben α_0 und α_i entlang P
15    sei z der Endknoten von P      // z = y_ℓ ist möglich
16    case z = y_0: multirecolor(i, α_i); z = y_i : multirecolor(i, α_0)
17    else multirecolor(ℓ, α_0)
```

Der Satz von Vizing

Prozedur `multirecolor`(i, α)

1 **for** $j := 1$ **to** $i - 1$ **do** $c(y_0, y_j) := (c(y_0, y_j) \setminus \{\alpha_{j-1}\}) \cup \{\alpha_j\}$
2 $c(y_0, y_i) := (c(y_0, y_i) \setminus \{\alpha_{i-1}\}) \cup \{\alpha\}$

- Man beachte, dass für jeden Multigraphen die Ungleichungen $\Delta(G) \leq \Delta(G) + v(G) \leq 2\Delta(G)$ gelten
- In den Übungen zeigen wir noch folgende Schranken

Korollar

1. Für jeden Multigraph G gilt $\chi'(G) \leq 3\Delta(G)/2$ (Satz von Shannon)
2. Für jeden bipartiten Multigraph G (d.h. $\chi(G) \leq 2$) gilt $\chi'(G) = \Delta(G)$ (Satz von König)