Graphalgorithmen

Johannes Köbler

Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

SS 2021

Matchings

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $M \subseteq E$.

- M heißt Matching in G, falls je zwei Kanten $e \neq e' \in M$ unabhängig sind, d.h. $e \cap e' = \emptyset$
- Die Matchingzahl von G ist

$$\boldsymbol{\mu(G)} = \max\{|M| : M \text{ ist ein Matching in } G\}$$

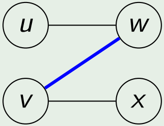
- Ein Knoten $v \in V$ heißt $\boldsymbol{M}$-gebunden, falls v Endpunkt einer Kante $e \in M$ (also $v \in \bigcup M$) ist und sonst $\boldsymbol{M}$-frei
- Wir sagen auch, $\boldsymbol{M}$ bindet $\boldsymbol{v}$ bzw. $\boldsymbol{M}$ lässt $\boldsymbol{v}$ frei
- Ein Matching M heißt perfekt, falls alle Knoten in G M-gebunden sind (also $V = \bigcup M$ ist)
- Ein Matching M heißt maximal (engl. *maximum*), falls $|M| = \mu(G)$ ist
- M heißt gesättigt (engl. *maximal*), falls es in keinem größeren Matching enthalten ist

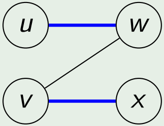
Matchings

- Offenbar ist M genau dann ein Matching, wenn $|\bigcup M| = 2|M|$ ist
- Das Ziel besteht nun darin, ein maximales Matching M zu finden

Beispiel

- Ein gesättigtes Matching muss nicht maximal sein:





- $M = \{\{v, w\}\}$ ist gesättigt, da es sich nicht erweitern lässt
- M ist jedoch kein maximales Matching, da $M' = \{\{u, w\}, \{v, x\}\}$ ein größeres Matching ist
- Die Greedy-Methode, ausgehend von $M = \emptyset$ solange Kanten zu M hinzuzufügen, bis sich M nicht mehr zu einem größeren Matching erweitern lässt, funktioniert also nicht

Satz

In einem bipartiten Graphen $G = (U, W, E)$ lässt sich ein maximales Matching in Zeit $O(m\sqrt{n})$ bestimmen

Beweis.

- Wir konstruieren zu G das Netzwerk $N = (V, E', s, t, c)$ mit der Knotenmenge $V = U \cup W \cup \{s, t\}$ und der Kantenmenge

  $$E' = \{(u, w) \in U \times W \mid \{u, w\} \in E\} \cup \{(s, u), (w, t) \mid u \in U, w \in W\},$$

  wobei $c(e) = 1$ für alle $e \in E'$ gilt
- Da alle Knoten $u \in U \cup W$ den Durchsatz $D(u) \leq 1$ in N haben, liefert jeder Fluss f in N ein Matching $M = \{\{u, w\} \in E \mid f(u, w) = 1\}$ in G mit $|M| = |f|$ und umgekehrt
- Mit Dinitz lässt sich in N unter Verwendung von `blockfluss1` ein maximaler Fluss (und damit ein maximales Matching) in Zeit $O(m\sqrt{n})$ bestimmen, da der Durchsatz aller Knoten (außer s und t) 1 ist $\square$

Matchings

- In den Übungen werden wir sehen, wie sich die Laufzeit durch eine verbesserte Analyse sogar durch $O(m\sqrt{\mu})$ begrenzen lässt
- Die Konstruktion im Beweis des vorigen Satzes lässt sich nicht ohne Weiteres auf Graphen verallgemeinern, die nicht bipartit sind
- Wir werden jedoch sehen, dass sich manche bei den Flussalgorithmen verwendete Ideen auch für Matchingalgorithmen einsetzen lassen
- So lassen sich Matchings, die nicht maximal sind, ähnlich vergrößern wie dies bei Flüssen durch einen Zunahmepfad möglich ist

Matchings

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei M ein Matching in G.

- Ein Pfad $P = (u_0, \ldots, u_l)$ in G der Länge $\ell \geq 1$ heißt ***M*-alternierend**, falls für $i = 1, \ldots, \ell - 1$ gilt:

  $$e_i = \{u_{i-1}, u_i\} \in M \iff e_{i+1} = \{u_i, u_{i+1}\} \notin M$$

- Ein Kreis $C = (u_1, \ldots, u_\ell, u_1)$ in G heißt ***M*-alternierend**, falls der Pfad $P = (u_1, \ldots, u_\ell)$ M-alternierend ist und zudem gilt:

  $$\{u_1, u_2\} \in M \iff \{u_1, u_\ell\} \notin M$$

- Ein M-alternierender Pfad $P = (u_0, \ldots, u_\ell)$ heißt ***M*-vergrößernder Pfad** (oder einfach ***M*-Pfad**), falls beide Endpunkte von P M-frei sind

Matchings

Satz (Lemma von Berge)

Ein Matching M in G ist genau dann maximal, wenn es keinen M-Pfad in G gibt

Beweis.

- Ist $P = (u_0, \ldots, u_l)$ ein M-Pfad, so liefert $M' = M \Delta P$ ein Matching der Größe $|M'| = |M| + 1$ in G, wobei wir P als Menge $\{\{u_{i-1}, u_i\} \mid i = 1, \ldots, l\}$ seiner Kanten auffassen
- Ist dagegen M nicht maximal und M' ein größeres Matching, so betrachten wir die Kantenmenge $M \Delta M'$
- Da jeder Knoten in dem Graphen $G' = (V, M \Delta M')$ höchstens den Grad 2 hat, lässt sich G' in disjunkte Kreise und Pfade zerlegen
- Da diese Kreise und Pfade M-alternierend sind, und M' größer als M ist, muss mindestens einer dieser Pfade ein M-Pfad sein $\square$

Es genügt also, für das aktuelle Matching M einen M-Pfad zu finden