Übungsblatt 11

Besprechung der mündlichen Aufgaben ab 8. 7. 2021
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15. 7. 2021, 13:00 Uhr

Aufgabe 47 ***mündlich***

Seien $A = \{A_1, \ldots, A_k\}$ und $B = \{B_1, \ldots, B_k\}$ Partitionen einer n-elementigen Menge V. Entwerfen Sie einen effizienten Algorithmus, der testet ob eine k-elementige Teilmenge $R \subseteq V$ existiert, die sowohl ein Repräsentantensystem für A als auch für B ist und im Fall der Existenz diese auch berechnet.

Aufgabe 48 ***mündlich***

(a) Zeigen Sie, dass es zu jedem OSC S in einem Graphen G eine Knotenüberdeckung U mit $|U| \le 2w(S)$ gibt. Ist diese Schranke scharf?

(b) Entwerfen Sie einen effizienten Algorithmus, der in einem gegebenen Graphen G eine Knotenüberdeckung U findet, die höchstens doppelt so groß wie eine minimale Knotenüberdeckung U' ist.

Aufgabe 49 ***mündlich***

Modifizieren Sie den Algorithmus von Edmonds so, dass er für einen gegebenem Graphen G und ein gegebenes Matching M in G ein Matching M' mit $M \subseteq M'$ berechnet, das maximale Größe unter allen solchen Matchings hat.

Aufgabe 50 ***mündlich***

Für ein Matching M in einem Graphen $G = (V, E)$ bezeichne $\mathit{free}(M) = n - 2|M|$ die Anzahl der M-freien Knoten. Für eine Teilmenge $A \subseteq V$ bezeichne $\mathit{odd}(G - A)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in $G - A$ mit einer ungeraden Knotenzahl. Zeigen Sie:

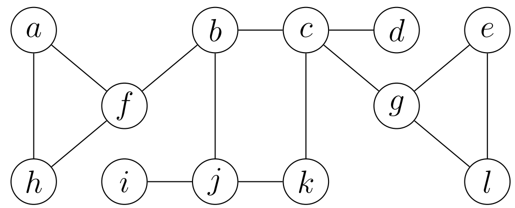
(a) Für jedes Matching M in G und jede Teilmenge $A \subseteq V$ gilt $\mathit{free}(M) \ge \mathit{odd}(G - A) - |A|$.

(b) Ein Matching M ist genau dann maximal, wenn es eine Teilmenge $A \subseteq V$ mit $\mathit{free}(M) = \mathit{odd}(G - A) - |A|$ gibt. Wir nennen eine solche Menge A ein ***Zertifikat*** für (die Maximalität von) M.

Hinweis: Zeigen Sie, dass jedes OSC $S = \{u_1, \ldots, u_k, C_1, \ldots, C_\ell\}$ in G mit $w(S) = |M|$ ein Zertifikat $A = \{u_1, \ldots, u_k\}$ für M liefert.

Aufgabe 51 ***10 Punkte***

(a) Modifizieren Sie den Algorithmus von Edmonds so, dass er nicht nur ein maximales Matching M, sondern auch ein Zertifikat (siehe Aufgabe 50) für M ausgibt. Wie verarbeitet Ihr Algorithmus den folgenden Graphen, wenn jeweils die lexikografisch kleinste Kante (u, v) aus Q entnommen wird?



(b) Entwerfen Sie einen effizienten Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ und zwei Mengen $M \subseteq E$, $A \subseteq V$ überprüft, ob A ein Zertifikat für das maximale Matching M ist.