Übungsblatt 9

Besprechung der mündlichen Aufgaben ab 24. 6. 2021
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 1. 7. 2021, 13:00 Uhr

Aufgabe 37 Sei $G = (V, E)$ ein Graph. ***mündlich***

(a) Zeigen Sie, dass $\kappa(G) \leq 2m/n$ (Durchschnittsgrad) ist.

(b) Finden Sie einen Algorithmus, der $\kappa(G)$ in Zeit $O(m\sqrt{n^5})$ berechnet.

Hinweis: Benutzen Sie den Algorithmus von Dinitz, um für alle Paare $\{x, y\} \notin E$ einen kleinsten x-y-Separator zu berechnen (vgl. Aufgabe 29(c)).

(c) Verbessern Sie die Laufzeit auf $O(m^2\sqrt{n})$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass es genügt, für $i = 1, 2, \ldots$ jeweils für alle Paare $\{i, j\} \notin E$ einen kleinsten i-j-Separator S zu berechnen, bis $|S| < i$ ist, und benutzen Sie (a).

Aufgabe 38 ***mündlich***

Welche Laufzeiten hat der Dinitz-Algorithmus unter Verwendung der Prozedur

(a) `blockfluss1`

(b) `blockfluss2`

für die Netzwerke $N_k = (V_k, E_k, a_0, a_k, c'_k)$ aus Aufgabe 32.

Aufgabe 39 ***mündlich***

Sei $U \subseteq V$ eine unabhängige Knotenmenge in einem Graphen $G = (V, E)$, so dass $\deg(u) \geq \deg(v)$ für alle Knoten $u \in U$ und $v \in N(u)$ gilt. Zeigen Sie, dass G ein Matching M hat, das alle Knoten in U bindet.

Hinweis: Betrachten Sie den bipartiten Graphen $G' = (U, W, E')$, der aus G durch Entfernen aller Kanten zwischen 2 Knoten in $W = V \setminus U$ entsteht, und verwenden Sie den Heiratssatz.

Aufgabe 40 ***mündlich***

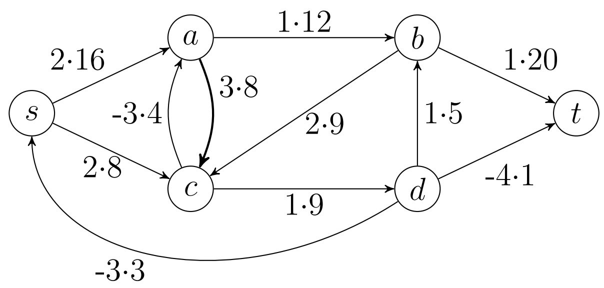
Für eine n-köpfige Reisegruppe stehen genau n Hotelzimmer zur Verfügung. Jede Person i hat eine bestimmte Vorstellung vom Wert jedes Zimmers j, die sie in Form von Präferenzwerten $g(i, j)$ ausdrückt, wobei die Differenz $g(i, j) - g(i, j')$ in etwa dem Aufpreis entspricht, den Person i für Zimmer j im Vergleich zu Zimmer j' zahlen würde.

(a) Finden Sie einen Algorithmus A, der jeder Person i ein Zimmer $\pi(i)$ mit dem Ziel zuweist, die Summe $\sum_{i=1}^{n} g(i, \pi(i))$ der Präferenzen aller Teilnehmer zu maximieren.

(b) Finden Sie einen Algorithmus B, der für jedes Zimmer j einen Preis $p(j)$ ermittelt, sodass keine Person i ein anderes Zimmer bevorzugen würde (d.h. für alle i, j gilt $g(i, \pi(i)) - p(\pi(i)) \geq g(i, j) - p(j)$). *Hinweis:* Berechnen Sie eine Preisfunktion p, so dass $g^p(i, j) \leq 0$ und $g^p(i, \pi(i)) = 0$ für alle i, j gilt.

Aufgabe 41 ***10 Punkte***

(a) Berechnen Sie in folgendem Netzwerk $N = (V, E, s, t, c, k)$ einen maximalen Fluss mit minimalen Kosten (alle Kanten $e \in E$ sind mit $k(e) \cdot c(e)$ beschriftet):



(b) Lösen Sie (a) für das Netzwerk N', das aus N entsteht, indem wir $k(s, d)$ auf den Wert 9 sowie $k(d, s)$ auf den Wert -9 setzen.