Übungsblatt 7

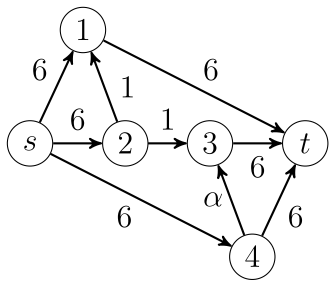
Besprechung der mündlichen Aufgaben ab 10. 6. 2021
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 17. 6. 2021, 13:00 Uhr

Aufgabe 31 ***mündlich***

(a) Zeigen Sie, dass der Algorithmus von Ford-Fulkerson auch auf Netzwerken mit Kapazitäten in $\mathbb{Q}^+$ korrekt arbeitet. Welche Laufzeitschranke ergibt sich in diesem Fall?

(b) Arbeitet der Algorithmus von Ford-Fulkerson auch auf Netzwerken mit reellen Kapazitäten $c(e) \geq 0$ korrekt?

Hinweis: Betrachten Sie für nebenstehendes Netzwerk die Folge der Zunahmepfade $P_1 = (s, 2, 3, t)$, $P_2 = (s, 4, 3, 2, 1, t)$, $P_3 = (s, 2, 3, 4, t)$, $P_4 = P_2$, $P_5 = (s, 1, 2, 3, t)$ und $P_i = P_{i-4}$ für $i \geq 6$, wobei die Kapazität $\alpha \in \mathbb{R}^+$ die Gleichung $\alpha^2 + \alpha = 1$ erfüllt.



Aufgabe 32 ***mündlich***

Welche Laufzeiten hat der Edmonds-Karp-Algorithmus für die Netzwerke $N_k = (V_k, E_k, a_0, a_k, c'_k)$ mit $V_k = \{a_0\} \cup \{a_i, b_i, c_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ und

$$\begin{aligned} E_k = &\{(a_i, a_{i+1}) \mid 0 \leq i < k\}\ (A) \\ &\cup \{(a_{4i}, c_j) \mid 0 \leq i \leq k', 1 \leq j \leq k\}\ (B) \\ &\cup \{(a_{4i+2}, b_j) \mid 0 \leq i < k', 1 \leq j \leq k\}\ (B) \\ &\cup \{(b_j, a_{4i+k/2+2}) \mid 0 \leq i \leq k', 1 \leq j \leq k\}\ (B) \\ &\cup \{(c_j, a_{4i+k/2+4}) \mid 0 \leq i < k', 1 \leq j \leq k\}\ (B) \\ &\cup \{(c_i, b_j) \mid 1 \leq i, j \leq k\}\ (C) \end{aligned}$$

wobei $k \geq 4$ mit $k \equiv_8 4$ sowie $k' = (k-4)/8$ ist und die Kanten $e \in E_k$ abhängig von ihrem Typ die Kapazität $c'_k(e) = k^3$ (A), $c'_k(e) = k$ (B) bzw. $c'_k(e) = 1$ (C) haben.

Aufgabe 33 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass sich der Abstand $d_{i+1}(s,t)$ zwischen s und t im Restnetzwerk $N_{f_{i+1}}$ gegenüber $d_i(s,t)$ nicht unbedingt vergrößert, wenn auf den aktuellen Fluss f_i ein blockierender Fluss g_i des gesamten Restnetzwerks N_{f_i} anstelle des Schichtnetzwerkes N'_{f_i} addiert wird.

Aufgabe 34 Sei $G = (V, E)$ ein azyklischer Digraph. ***10 Punkte***

(a) Zeigen Sie, dass für jede Menge $M = \{P_1, \ldots, P_k\}$ von disjunkten Pfaden P_i in G (d.h. je zwei Pfade in M haben keine gemeinsamen Knoten), die alle Knoten überdecken, die Gleichheit $n = k + |E_M|$ gilt, wobei $E_M = \bigcup_{i=1}^k E(P_i)$ die Menge aller Kanten in M und $|E_M| = \sum_{i=1}^k \ell(P_i)$ die Summe der Pfadlängen ist.

(b) Reduzieren Sie das Problem, für G eine möglichst kleine Menge von disjunkten Pfaden zu finden, die alle Knoten überdecken, auf ein Flussproblem.

Hinweis: Erweitern Sie den Digraphen $G_0 = (V', E_0)$ mit $V' = \{s, t\} \cup \{u', u'' \mid u \in V\}$ und $E_0 = \{(s, u'), (u'', t) \mid u \in V\}$ zu einem Netzwerk $N_G = (V', E', s, t, c)$ mit Kanten der Form (u', v''), so dass jeder Fluss f in N_G zu einer Menge M von disjunkten Pfaden in G mit insgesamt $|E_M| = |f|$ Kanten korrespondiert.

(c) Lösen Sie (b), falls die gesuchten Pfade nicht disjunkt sein müssen.

Hinweis: Erweitern Sie G_0 zu einem Netzwerk $N'_G = (V', E'', s, t, c_{min})$ mit Mindestkapazitäten und Kanten der Form (u'', v') und (u', u''), so dass jeder Fluss f in N'_G zu einer Menge M_f von $|f|$ Pfaden korrespondiert, die alle Knoten überdecken.