Übungsblatt 4

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 20. 5. 2021
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 27. 5. 2021, 13:00 Uhr

Aufgabe 16 Sei $1 \leq k \leq n$. ***mündlich***

(a) Bestimmen Sie alle Graphen G mit n Knoten und $\chi(G) = k$, die eine bzgl. Inklusion maximale Kantenmenge haben.

(b) Bestimmen Sie alle Graphen G mit n Knoten und $\chi(G) = k$, die eine maximale Anzahl von Kanten haben. Sei $e_k(n)$ diese Anzahl.

(c) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} e_k(n)/\binom{n}{2} = 1 - 1/k$ gilt.

Aufgabe 17 Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) In jeder Suchordnung von G werden die Knoten jeder Zusammenhangskomponente von G konsekutiv aufgelistet.

(b) $\texttt{DFS}(V, E)$ gibt eine DFS-Ordnung von G aus.

Aufgabe 18 ***mündlich***

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *k-faktorisierbar*, wenn sich seine Kantenmenge so in $l \geq 0$ Teilmengen $E = E_1 \cup \cdots \cup E_l$ partitionieren lässt, dass die Graphen $G_i = (V, E_i)$ für $i = 1, \ldots, l$ k-regulär sind (d.h. jeder Knoten $v \in V$ hat in G_i den Grad k).

(a) Geben Sie einen regulären Graphen an, der ein perfektes Matching besitzt, aber nicht 1-faktorisierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass ein regulärer Graph G genau dann 1-faktorisierbar ist, wenn $\chi'(G) = \Delta(G)$ ist.

Aufgabe 19 ***mündlich***

Geben Sie für $k = 0, 1, 2, 3$ einen Multigraphen G_k mit 3 Knoten, Maximalgrad 6 und Vielfachheit 3 an, für den $\chi'(G_k) = 6 + k$ ist.

Aufgabe 20 ***mündlich***

Beschreiben Sie folgende Aufgabe als ein Graphproblem:

Zwischen n Stationen sollen mehrere Datenpakete versendet werden. Jede Station kann pro Zeiteinheit höchstens ein Paket senden oder empfangen (aber nicht beides gleichzeitig). Berechnen Sie einen Zeitplan für den Versand aller Datenpakete, falls Station i insgesamt p_{ij} Pakete an Station j senden möchte. Dabei soll die Gesamtdauer und die Anzahl von gleichzeitig aktiven Datenleitungen minimiert werden.

Aufgabe 21 ***mündlich***

Zeigen Sie für einen beliebigen Multigraphen $G = (V, E)$:

(a) $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$.

(b) $\chi'(G) \leq (3/2)\Delta(G)$.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass H ein Multigraph mit $k = \chi'(H) > (3/2)\Delta(H)$ und $\chi'(H - e) = k - 1$ für alle Kanten e von H ist, und benutzen Sie folgende Verallgemeinerung des Satzes von Vizing auf Multigraphen, um einen Widerspruch zu erhalten:
Für jeden Multigraphen G gilt $\chi'(G) \leq \Delta(G) + v(G)$.

Aufgabe 22 ***10 Punkte***

Zeigen Sie für einen beliebigen Multigraphen $G = (V, E)$:

(a) E lässt sich in $k = \chi'(G)$ Matchings $M_1, \ldots, M_k$ von G zerlegen, so dass $\|M_i\| - \|M_j\| \in \{-1, 0, 1\}$ für alle i, j gilt.

(b) Falls G bipartit ist, gilt $\chi'(G) = \Delta(G)$.