Übungsblatt 3

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 6. 5. 2021
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 20. 5. 2021, 13:00 Uhr

Aufgabe 11 Beschreiben Sie folgende Aufgabenstellungen als Graphprobleme: ***mündlich***

(a) Wie lange muss eine Tagung mindestens dauern, wenn pro Vortrag eine Stunde veranschlagt wird und jeder Teilnehmer mit seiner Anmeldung eine Liste aller ihn interessierenden Vorträge einsendet?

(b) Wieviele Wochenstunden muss ein Stundenplan umfassen, wenn Lehrer L_i in Klasse K_j pro Woche n_{ij} Stunden unterrichten soll?

Aufgabe 12 Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) G hat mindestens $\chi(G)$ Knoten u vom Grad $\deg(u) \geq \chi(G) - 1$.

(b) Sei d der maximale Minimalgrad $\delta(U)$ aller induzierten Untergraphen U von G. Dann gilt $\chi(G) \leq d + 1$.

(c) Es gilt $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$.

(d) Für $e = \{u, v\} \in \binom{V}{2} \setminus E$ gilt $\chi(G) = \min\{\chi(G_{uv}), \chi(G \cup e)\}$ und daher $|\chi(G_{uv}) - \chi(G \cup e)| \leq 1$.

Aufgabe 13 ***mündlich***

Finden Sie möglichst effiziente Algorithmen, die folgende Graphklassen erkennen und jeden Graphen G der Klasse mit $\chi(G)$ Farben färben.

(a) Die Klasse der K_3-freien Graphen.

(b) Die Klasse der $K_{1,3}$-freien Graphen.

Aufgabe 14 ***mündlich***

Bezeichne $P_G(x)$ die Anzahl der x-Färbungen eines Graphen $G = (V, E)$. Zeigen Sie:

(a) Für jede Kante $e = \{u, v\} \in E$ gilt $P_G(x) = P_{G-e}(x) - P_{G_{uv}}(x)$.

(b) $P_G(x)$ ist ein Polynom vom Grad n in der Variablen x.
Hinweis: Zeigen Sie durch Induktion über die Kantenzahl m von G die stärkere Behauptung, dass $P_G(x)$ ein Polynom von der Form $x^n - mx^{n-1} + \cdots$ ist.

(c) Falls u k-simplizial in G ist, dann gilt $P_G(x) = (x - k)P_{G-u}(x)$.

(d) Bestimmen Sie $P_G(x)$ für $G = E_n, K_n, C_n, P_n$ und jeden Baum T.

Aufgabe 15 ***10 Punkte***

Für jeden Job $j = 1, \ldots, n$ ist ein Zeitintervall $I_j = [a_j, b_j]$ vorgegeben, das den Startzeitpunkt $a_j \in \mathbb{N}$ und den Endzeitpunkt $b_j \in \mathbb{N}$ für diesen Job angibt.

(a) Beschreiben Sie folgende Aufgabenstellung als ein Graphfärbungsproblem: Wieviele Arbeiter werden benötigt, um alle Jobs zu erledigen, wenn kein Arbeiter gleichzeitig an mehreren Jobs arbeiten kann?

(b) Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der eine Verteilung aller Jobs auf eine minimale Anzahl k von Arbeitern berechnet. Der Algorithmus soll zudem einen Zeitpunkt z ausgeben, zu dem k Jobs aktiv sind.
Hinweis: Überlegen Sie, wie sich für den Intervallgraphen $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$ und $E = \{\{j, k\} \mid j \neq k \wedge I_j \cap I_k \neq \emptyset\}$ eine PEO erhalten lässt.