

Übungsblatt 2

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 29. 4. 2021
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 6. 5. 2021, 13:00 Uhr

Aufgabe 7

mündlich

Zeigen Sie, dass $G - e$ ein $(k - 1)$ -zusammenhängender Graph ist, falls $G = (V, E)$ ein k -zusammenhängender Graph mit $e \in E$ und $k \geq 1$ ist.

Aufgabe 8

mündlich

Zeigen Sie für einen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ mit $n \geq 3$ Knoten.

- (a) G ist genau dann 2-zusammenhängend, wenn je 2 Knoten von G auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Menger: G ist genau dann k -zusammenhängend, wenn je zwei Knoten u, v in G durch mindestens k knotendisjunkte Pfade verbunden sind.

- (b) Sei die Relation \sim auf E definiert durch $e \sim e'$, falls $e = e'$ ist oder e und e' auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Dann ist \sim eine Äquivalenzrelation.
- (c) Seien E_1, \dots, E_k die Äquivalenzklassen von \sim und $V_i = V(E_i)$ die zugehörigen Knotenmengen. Dann gilt $\|V_i \cap V_j\| \leq 1$ für alle $i \neq j$.

Bemerkung: Die Teilgraphen $G[V_i]$ heißen *Blöcke* von G .

- (d) Jeder Block $B_i = G[V_i] \not\cong K_2$ von G ist 2-zusammenhängend und G ist genau dann 2-zusammenhängend, wenn G nur aus einem Block $G = B_1 \not\cong K_2$ besteht.

- (e) Sei B der Graph, dessen Knotenmenge aus allen Blöcken und Artikulationen von G besteht und in dem jeder Block zu allen darin enthaltenen Artikulationen adjazent ist. Dann ist B ein Baum (B heißt der *BC-Baum* (*block cut tree*) von G).

Aufgabe 9 Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph. **mündlich**
 G heißt *eindeutig einbettbar*, wenn $R \in \{S, S^R\}$ (d.h. $R = S$ oder R entsteht aus S durch Spiegelung aller Ränder) für je zwei ebene Realisierungen $H = (V, E, R)$ und $H' = (V, E, S)$ von G gilt.

- (a) Finden Sie einen planaren Graphen mit möglichst wenigen Knoten (bzw. Kanten, Gebieten), der nicht eindeutig einbettbar ist.
- (b) Sei H eine ebene Realisierung eines planaren Graphen G . Zeigen Sie, dass $\kappa(G) \leq 2$ ist, falls es in H ein Gebiet gibt, dessen Rand einen Kreis mit mindestens 2 Brücken in G bildet.
- (c) Seien H und H' ebene Realisierungen eines planaren Graphen G . Zeigen Sie, dass es für jedes Gebiet g in H , dessen Rand einen Kreis mit höchstens einer Brücke in G bildet, ein Gebiet g' in H' gibt, das den gleichen Kreis als Rand hat.
- (d) Zeigen Sie, dass alle 3-zusammenhängenden planaren Graphen G eindeutig einbettbar sind (Satz von Whitney).

Aufgabe 10

10 Punkte

Ein Graph G heißt *outerplanar*, falls G eine ebene Realisierung hat, in der alle Knoten an das äußere Gebiet grenzen. Zeigen Sie:

- (a) G ist genau dann outerplanar, wenn G weder den $K_{2,3}$ noch den K_4 als Minor enthält. (*Hinweis:* Betrachten Sie den Graphen G' , der aus G durch Hinzufügen eines weiteren Knotens entsteht, welcher mit allen Knoten von G verbunden wird.)
- (b) Für jeden outerplanaren Graphen G gilt $\delta(G) \leq 2$.
- (c) Finden Sie einen effizienten Algorithmus, der für jeden Eingabegraphen G entweder eine $\chi(G)$ -Färbung oder einen topologischen Minor H von G mit $\delta(H) > 2$ (als Zertifikat, dass G nicht outerplanar ist) ausgibt.