

Vorlesungsskript  
Graphalgorithmen

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Johannes Köbler  
Sebastian Kuhnert  
Humboldt-Universität zu Berlin  
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

4. Mai 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Graphentheoretische Grundlagen</b>	<b>1</b>
<b>2 Färben von Graphen</b>	<b>3</b>
2.1 Färben von planaren Graphen . . . . .	4

# 1 Graphentheoretische Grundlagen

**Definition 1.1.** Ein (ungerichteter) **Graph** ist ein Paar  $G = (V, E)$ , wobei

- V - eine endliche Menge von **Knoten/Ecken** und
- E - die Menge der **Kanten** ist.

Hierbei gilt

$$E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}.$$

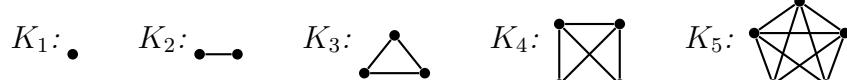
Sei  $v \in V$  ein Knoten.

- a) Die **Nachbarschaft** von  $v$  ist  $N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$ .
- b) Der **Grad** von  $v$  ist  $\deg_G(v) = \|N_G(v)\|$ .
- c) Der **Minimalgrad** von  $G$  ist  $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg_G(v)$  und der **Maximalgrad** von  $G$  ist  $\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg_G(v)$ .

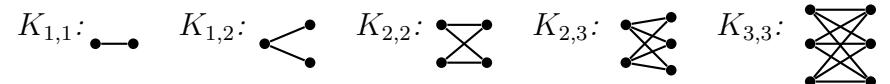
Falls  $G$  aus dem Kontext ersichtlich ist, schreiben wir auch einfach  $N(v)$ ,  $\deg(v)$ ,  $\delta$  usw.

## Beispiel 1.2.

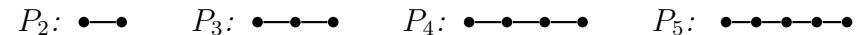
- Der **vollständige Graph**  $(V, E)$  auf  $n$  Knoten, d.h.  $\|V\| = n$  und  $E = \binom{V}{2}$ , wird mit  $K_n$  und der **leere Graph**  $(V, \emptyset)$  auf  $n$  Knoten wird mit  $E_n$  bezeichnet.



- Der **vollständige bipartite Graph**  $(A, B, E)$  auf  $a + b$  Knoten, d.h.  $A \cap B = \emptyset$ ,  $\|A\| = a$ ,  $\|B\| = b$  und  $E = \{\{u, v\} \mid u \in A, v \in B\}$  wird mit  $K_{a,b}$  bezeichnet.



- Der **Pfad** mit  $n$  Knoten wird mit  $P_n$  bezeichnet.



- Der **Kreis** mit  $n$  Knoten wird mit  $C_n$  bezeichnet.



**Definition 1.3.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph.

- a) Eine Knotenmenge  $U \subseteq V$  heißt **unabhängig** oder **stabil**, wenn es keine Kante von  $G$  mit beiden Endpunkten in  $U$  gibt, d.h. es gilt  $E \cap \binom{U}{2} = \emptyset$ . Die **Stabilitätszahl** ist

$$\alpha(G) = \max\{\|U\| \mid U \text{ ist stabile Menge in } G\}.$$

- b) Eine Knotenmenge  $U \subseteq V$  heißt **Clique**, wenn jede Kante mit beiden Endpunkten in  $U$  in  $E$  ist, d.h. es gilt  $\binom{U}{2} \subseteq E$ . Die **Cliquenzahl** ist

$$\omega(G) = \max\{\|U\| \mid U \text{ ist Clique in } G\}.$$

- c) Ein Graph  $G' = (V', E')$  heißt **Sub-/Teil-/Untergraph** von  $G$ , falls  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$  ist. Im Fall  $V' = V$  schreiben wir für  $G'$  auch  $G - E''$  (bzw.  $G = G' \cup E''$ ), wobei  $E'' = E - E'$  die Menge der aus  $G$  entfernten Kanten ist. Im Fall  $E'' = \{e\}$  schreiben wir für  $G'$  auch einfach  $G - e$  (bzw.  $G = G' \cup e$ ).

- d) Ein Subgraph  $G' = (V', E')$  heißt **(durch  $V'$ ) induziert**, falls  $E' = E \cap \binom{V'}{2}$  ist. Für  $G'$  schreiben wir dann auch  $G[V']$  oder  $G - V''$ , wobei  $V'' = V - V'$  die Menge der aus  $G$  entfernten Knoten ist. Ist  $V'' = \{v\}$ , so schreiben wir für  $G'$  auch einfach  $G - v$  und im Fall  $V' = \{v_1, \dots, v_k\}$  auch  $G[v_1, \dots, v_k]$ .

- e) Ein **Weg** ist eine Folge von (nicht notwendig verschiedenen) Knoten  $v_0, \dots, v_\ell$  mit  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$  für  $i = 0, \dots, \ell - 1$ , der jede Kante  $e \in E$  höchstens einmal durchläuft. Die **Länge** des Weges ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten, also  $\ell$ . Im Fall  $\ell = 0$  heißt der Weg **trivial**. Ein Weg  $v_0, \dots, v_\ell$  heißt auch  **$v_0$ - $v_\ell$ -Weg**.
- f) Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt **zusammenhängend**, falls es für alle Paare  $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$  einen  $u$ - $v$ -Weg gibt.  $G$  heißt  **$k$ -zusammenhängend**,  $1 < k < n$ , falls  $G$  nach Entfernen von beliebigen  $l \leq \min\{n - 1, k - 1\}$  Knoten immer noch zusammenhängend ist.
- g) Ein **Zyklus** ist ein  $u$ - $v$ -Weg der Länge  $\ell \geq 2$  mit  $u = v$ .
- h) Ein Weg heißt **einfach** oder **Pfad**, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.
- i) Eine Menge von Pfaden heißt **knotendisjunkt**, wenn je zwei Pfade in der Menge höchstens gemeinsame Endpunkte haben, und **kantendisjunkt**, wenn sie keine gemeinsame Kanten haben.
- j) Ein **Kreis** ist ein Zyklus  $v_0, v_1, \dots, v_{\ell-1}, v_0$  der Länge  $\ell \geq 3$ , für den  $v_0, v_1, \dots, v_{\ell-1}$  paarweise verschieden sind.
- k) Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt **kreisfrei**, **azyklisch** oder **Wald**, falls er keinen Kreis enthält.
- l) Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Wald.
- m) Jeder Knoten  $u \in V$  vom Grad  $\deg(u) \leq 1$  heißt **Blatt** und die übrigen Knoten (vom Grad  $\geq 2$ ) heißen **innere Knoten**.

Es ist leicht zu sehen, dass die Relation

$$Z = \{(u, v) \in V \times V \mid \text{es gibt in } G \text{ einen } u\text{-}v\text{-Weg}\}$$

eine Äquivalenzrelation ist. Die durch die Äquivalenzklassen von  $Z$  induzierten Teilgraphen heißen die **Zusammenhangskomponenten** (engl. *connected components*) oder einfach Komponenten von  $G$ .

**Definition 1.4.** Ein **gerichteter Graph** oder **Digraph** ist ein Paar  $G = (V, E)$ , wobei

$V$  - eine endliche Menge von **Knoten/Ecken** und  
 $E$  - die Menge der **Kanten** ist.

Hierbei gilt

$$E \subseteq V \times V = \{(u, v) \mid u, v \in V\},$$

wobei  $E$  auch Schlingen  $(u, u)$  enthalten kann. Sei  $v \in V$  ein Knoten.

- a) Die **Nachfolgermenge** von  $v$  ist  $N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$ .
- b) Die **Vorgängermenge** von  $v$  ist  $N^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$ .
- c) Die **Nachbarmenge** von  $v$  ist  $N(v) = N^+(v) \cup N^-(v)$ .
- d) Der **Ausgangsgrad** von  $v$  ist  $\deg^+(v) = \|N^+(v)\|$  und der **Eingangsgrad** von  $v$  ist  $\deg^-(v) = \|N^-(v)\|$ . Der **Grad** von  $v$  ist  $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$ .
- e) Ein (**gerichteter**)  **$v_0$ - $v_\ell$ -Weg** ist eine Folge von Knoten  $v_0, \dots, v_\ell$  mit  $(v_i, v_{i+1}) \in E$  für  $i = 0, \dots, \ell - 1$ , der jede Kante  $e \in E$  höchstens einmal durchläuft.
- f) Ein (**gerichteter**) **Zyklus** ist ein gerichteter  $u$ - $v$ -Weg der Länge  $\ell \geq 1$  mit  $u = v$ .
- g) Ein gerichteter Weg heißt **einfach** oder (**gerichteter**) **Pfad**, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.
- h) Ein (**gerichteter**) **Kreis** in  $G$  ist ein gerichteter Zyklus  $v_0, v_1, \dots, v_{\ell-1}, v_0$  der Länge  $\ell \geq 1$ , für den  $v_0, v_1, \dots, v_{\ell-1}$  paarweise verschieden sind.
- i)  $G$  heißt **kreisfrei** oder **azyklisch**, wenn es in  $G$  keinen gerichteten Kreis gibt.
- j)  $G$  heißt **stark zusammenhängend**, wenn es in  $G$  für jedes Knotenpaar  $u \neq v \in V$  sowohl einen  $u$ - $v$ -Pfad als auch einen  $v$ - $u$ -Pfad gibt.

Die **Adjazenzmatrix** eines Graphen bzw. Digraphen  $G = (V, E)$  mit (geordneter) Knotenmenge  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  ist die  $(n \times n)$ -Matrix

$A = (a_{ij})$  mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

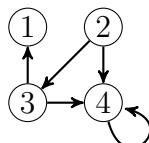
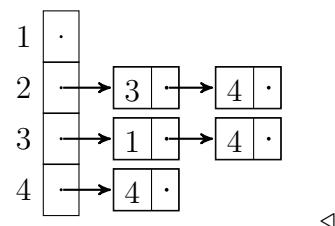
Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenzmatrix symmetrisch mit  $a_{ii} = 0$  für  $i = 1, \dots, n$ .

Bei der **Adjazenzlisten-Darstellung** wird für jeden Knoten  $v_i$  eine Liste mit seinen Nachbarn verwaltet. Im gerichteten Fall verwaltet man entweder nur die Liste der Nachfolger oder zusätzlich eine weitere für die Vorgänger. Falls die Anzahl der Knoten statisch ist, organisiert man die Adjazenzlisten in einem Feld, d.h. das Feldelement mit Index  $i$  verweist auf die Adjazenzliste von Knoten  $v_i$ . Falls sich die Anzahl der Knoten dynamisch ändert, so werden die Adjazenzlisten typischerweise ebenfalls in einer doppelt verketteten Liste verwaltet.

### Beispiel 1.5.

Betrachte den gerichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  und  $E = \{(2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 4)\}$ . Dieser hat folgende Adjazenzmatrix- und Adjazenzlisten-Darstellung:

	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	1
4	0	0	0	1



## 2 Färben von Graphen

**Definition 2.1.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und sei  $k \in \mathbb{N}$ .

- a) Eine Abbildung  $f: V \rightarrow \mathbb{N}$  heißt **Färbung** von  $G$ , wenn  $f(u) \neq f(v)$  für alle  $\{u, v\} \in E$  gilt.
- b)  $G$  heißt  **$k$ -färbar**, falls eine Färbung  $f: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  existiert.
- c) Die **chromatische Zahl** ist

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-färbar}\}.$$

### Beispiel 2.2.

$$\chi(E_n) = 1, \quad \chi(K_{n,m}) = 2, \quad \chi(K_n) = n,$$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade} \\ 3, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein wichtiges Entscheidungsproblem ist, ob ein gegebener Graph  $k$ -färbar ist. Dieses Problem ist für jedes feste  $k \geq 3$  schwierig.

**$k$ -Färbarkeit ( $k$ -COLORING):**

**Gegeben:** Ein Graph  $G$ .

**Gefragt:** Ist  $G$   $k$ -färbar?

**Satz 2.3.**  $k$ -COLORING ist für  $k \geq 3$  NP-vollständig.

Das folgende Lemma setzt die chromatische Zahl  $\chi(G)$  in Beziehung zur Stabilitätszahl  $\alpha(G)$ .

**Lemma 2.4.**  $n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$ .

*Beweis.* Sei  $G$  ein Graph und sei  $c$  eine  $\chi(G)$ -Färbung von  $G$ . Da dann die Mengen  $S_i = \{u \in V \mid c(u) = i\}$ ,  $i = 1, \dots, \chi(G)$ , stabil sind, folgt  $\|S_i\| \leq \alpha(G)$  und somit gilt

$$n = \sum_{i=1}^{\chi(G)} \|S_i\| \leq \chi(G)\alpha(G).$$

Für den Beweis von  $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$  sei  $S$  eine stabile Menge in  $G$  mit  $\|S\| = \alpha(G)$ . Dann ist  $G - S$   $k$ -färbar für ein  $k \leq n - \|S\|$ . Da wir alle Knoten in  $S$  mit der Farbe  $k + 1$  färben können, folgt  $\chi(G) \leq k + 1 \leq n - \alpha(G) + 1$ . ■

Beide Abschätzungen sind scharf, können andererseits aber auch beliebig schlecht werden.

**Lemma 2.5.**  $\binom{\chi(G)}{2} \leq m$  und somit  $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$ .

*Beweis.* Zwischen je zwei Farbklassen einer optimalen Färbung muss es mindestens eine Kante geben. ■

Die chromatische Zahl steht auch in Beziehung zur Cliquenzahl  $\omega(G)$  und zum Maximalgrad  $\Delta(G)$ :

**Lemma 2.6.**  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

*Beweis.* Die erste Ungleichung folgt daraus, dass die Knoten einer maximal großen Clique unterschiedliche Farben erhalten müssen.

Um die zweite Ungleichung zu erhalten, betrachte folgenden Färbungsalgorithmus:

### Algorithmus greedy-color

---

```

1  input ein Graph  $G = (V, E)$  mit  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ 
2   $c(v_1) := 1$ 
3  for  $i := 2$  to  $n$  do
4     $F_i := \{c(v_j) \mid j < i, v_j \in N(v_i)\}$ 
5     $c(v_i) := \min\{k \geq 1 \mid k \notin F_i\}$ 
```

---

Da für die Farbe  $c(v_i)$  von  $v_i$  nur  $\|F_i\| \leq \Delta(G)$  Farben verboten sind, gilt  $c(v_i) \leq \Delta(G) + 1$ . ■

## 2.1 Färben von planaren Graphen

Ein Graph  $G$  heißt **planar**, wenn er so in die Ebene einbettbar ist, dass sich zwei verschiedene Kanten höchstens in ihren Endpunkten berühren. Dabei werden die Knoten von  $G$  als Punkte und die Kanten von  $G$  als Verbindungslien zwischen den zugehörigen Endpunkten dargestellt.

Bereits im 19. Jahrhundert wurde die Frage aufgeworfen, wie viele Farben höchstens benötigt werden, um eine Landkarte so zu färben, dass aneinander grenzende Länder unterschiedliche Farben erhalten. Offensichtlich lässt sich eine Landkarte in einen planaren Graphen transformieren, indem man für jedes Land einen Knoten zeichnet und benachbarte Länder durch eine Kante verbindet. Länder, die sich nur in einem Punkt berühren, gelten dabei nicht als benachbart.

Die Vermutung, dass 4 Farben ausreichen, wurde 1878 von Kempe „bewiesen“ und erst 1890 entdeckte Heawood einen Fehler in Kemptes „Beweis“. Übrig blieb der **5-Farben-Satz**. Der **4-Farben-Satz** wurde erst 1976 von Appel und Haken bewiesen. Hierbei handelt es sich jedoch nicht um einen Beweis im klassischen Sinne, da zur Überprüfung der vielen auftretenden Spezialfälle Computer benötigt werden.

**Satz 2.7** (Appel, Haken 1976).

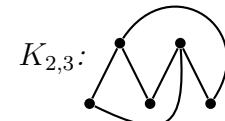
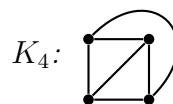
Jeder planare Graph ist 4-färbar.

Aus dem Beweis des 4-Farben-Satzes von Appel und Haken lässt sich ein 4-Färbungsalgorithmus für planare Graphen mit einer Laufzeit von  $\mathcal{O}(n^4)$  gewinnen.

In 1997 fanden Robertson, Sanders, Seymour und Thomas einen einfacheren Beweis für den 4-Farben-Satz, welcher zwar einen deutlich

schnelleren  $\mathcal{O}(n^2)$  Algorithmus liefert, aber auch nicht ohne Computerunterstützung verifizierbar ist.

**Beispiel 2.8.** Wie die folgenden Einbettungen von  $K_4$  und  $K_{2,3}$  in die Ebene zeigen, sind  $K_4$  und  $K_{2,3}$  planar.



△

Um eine Antwort auf die Frage zu finden, ob auch  $K_5$  und  $K_{3,3}$  planar sind, betrachten wir die Gebiete von in die Ebene eingebetteten Graphen.

Durch die Kanten eines eingebetteten Graphen wird die Ebene in so genannte **Gebiete** unterteilt. Nur eines dieser Gebiete ist unbeschränkt und dieses wird als **äußeres Gebiet** bezeichnet. Die Anzahl der Gebiete von  $G$  bezeichnen wir mit  $r(G)$  oder kurz mit  $r$ . Der **Rand**  $\text{rand}(g)$  eines Gebiets  $g$  ist die (zirkuläre) Folge aller Kanten, die an  $g$  grenzen, wobei jede Kante so durchlaufen wird, dass  $g$  „in Fahrtrichtung links“ liegt bzw. bei Erreichen eines Knotens über eine Kante  $e$ ,  $u$  über die im Uhrzeigersinn nächste Kante  $e'$  wieder verlassen wird. Die Anzahl der an ein Gebiet  $g$  grenzenden Kanten bezeichnen wir mit  $d(g)$ , wobei Kanten, die nur an  $g$  und an kein anderes Gebiet grenzen, doppelt gezählt werden.

Die Gesamtzahl  $\sum_g d(g)$  aller Inzidenzen von Gebieten und Kanten bezeichnen wir mit  $i(G)$ . Da jede Kante genau 2 Inzidenzen zu dieser Summe beiträgt, folgt

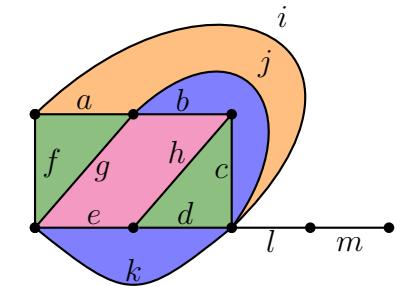
$$\sum_g d(g) = i(G) = 2m(G).$$

Ein **ebener Graph** wird durch das Tripel  $G = (V, E, R)$  beschrieben, wobei  $R$  aus den Rändern aller Gebiete von  $G$  besteht. Wir nennen

$G$  auch **ebene Realisierung** des Graphen  $(V, E)$ . Durch  $R$  ist für jeden Knoten  $u$  die (zirkuläre) Ordnung  $\pi$  auf allen mit  $u$  inzidenten Kanten eindeutig festgelegt (und umgekehrt). Man nennt  $\pi$  das zu  $G$  gehörige **Rotationssystem**. Dieses kann bei Verwendung der Adjazenzlistendarstellung ohne zusätzlichen Platzaufwand gespeichert werden, indem man die zu  $u$  adjazenten Knoten gemäß  $\pi$  anordnet.

**Beispiel 2.9.** Nebenstehender ebener Graph hat 13 Kanten  $a, \dots, m$  und 7 Gebiete mit den Rändern

$$R = \{(a, f, g), (a, j, i), (b, g, e, h), \\ (b, c, j), (c, h, d), (d, e, k), \\ (f, i, l, m, m, l, k)\}.$$



Das zugehörige Rotationssystem ist

$$\pi = \{(a, f, i), (a, j, b, g), (b, c, h), (e, k, f, g), (d, e, h), \\ (c, j, i, l, k, d), (l, m), (m)\}.$$

Man beachte, dass sowohl in  $R$  als auch in  $\pi$  jede Kante genau zweimal vorkommt. Anstelle von Kantenfolgen kann man  $R$  und  $\pi$  auch durch entsprechende Knotenfolgen beschreiben. □

**Satz 2.10** (Polyederformel von Euler, 1750).

Für einen zusammenhängenden ebenen Graphen  $G = (V, E, R)$  gilt

$$n(G) - m(G) + r(G) = 2. \quad (*)$$

*Beweis.* Wir führen den Beweis durch Induktion über die Kantenzahl  $m(G) = m$ .

$m = 0$ : Da  $G$  zusammenhängend ist, muss dann  $n = 1$  sein.

Somit ist auch  $r = 1$ , also  $(*)$  erfüllt.

$m - 1 \rightsquigarrow m$ : Sei  $G$  ein zusammenhängender ebener Graph mit  $m$  Kanten.

Ist  $G$  ein Baum, so entfernen wir ein Blatt und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen  $G'$  mit  $n' = n - 1$  Knoten,  $m' = m - 1$  Kanten und  $r' = r$  Gebieten. Nach IV folgt  $n - m + r = (n - 1) - (m - 1) + r = n' - m' + r' = 2$ .

Falls  $G$  kein Baum ist, entfernen wir eine Kante auf einem Kreis in  $G$  und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen  $G'$  mit  $n' = n$  Knoten,  $m' = m - 1$  Kanten und  $r' = r - 1$  Gebieten. Nach IV folgt  $n - m + r = n - (m - 1) + (r - 1) = n' - m' + r' = 2$ . ■

**Korollar 2.11.** Sei  $G = (V, E)$  ein planarer Graph mit  $n \geq 3$  Knoten. Dann ist  $m \leq 3n - 6$ . Falls  $G$  dreiecksfrei ist, gilt sogar  $m \leq 2n - 4$ .

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $G$  zusammenhängend. Wir betrachten eine beliebige planare Einbettung von  $G$ . Da  $n \geq 3$  ist, ist jedes Gebiet  $g$  von  $d(g) \geq 3$  Kanten umgeben. Daher ist  $2m = i = \sum_g d(g) \geq 3r$  bzw.  $r \leq 2m/3$ . Eulers Formel liefert

$$m = n + r - 2 \leq n + 2m/3 - 2,$$

was  $(1 - 2/3)m \leq n - 2$  und somit  $m \leq 3n - 6$  impliziert.

Wenn  $G$  dreiecksfrei ist, ist jedes Gebiet von  $d(g) \geq 4$  Kanten umgeben. Daher ist  $2m = i = \sum_g d(g) \geq 4r$  bzw.  $r \leq m/2$ . Eulers Formel liefert daher  $m = n + r - 2 \leq n + m/2 - 2$ , was  $m/2 \leq n - 2$  und somit  $m \leq 2n - 4$  impliziert. ■

**Korollar 2.12.**  $K_5$  ist nicht planar.

*Beweis.* Wegen  $n = 5$ , also  $3n - 6 = 9$ , und wegen  $m = \binom{5}{2} = 10$  gilt  $m \not\leq 3n - 6$ . ■

**Korollar 2.13.**  $K_{3,3}$  ist nicht planar.

*Beweis.* Wegen  $n = 6$ , also  $2n - 4 = 8$ , und wegen  $m = 3 \cdot 3 = 9$  gilt  $m \not\leq 2n - 4$ . ■

Als weitere interessante Folgerung aus der Polyederformel können wir zeigen, dass jeder planare Graph einen Knoten  $v$  vom Grad  $\deg(v) \leq 5$  hat.

**Lemma 2.14.** Jeder planare Graph hat einen Minimalgrad  $\delta(G) \leq 5$ .

*Beweis.* Für  $n \leq 6$  ist die Behauptung klar. Für  $n > 6$  impliziert die Annahme  $\delta(G) \geq 6$  die Ungleichung

$$m = \frac{1}{2} \sum_{u \in V} \deg(u) \geq \frac{1}{2} \sum_{u \in V} 6 = 3n,$$

was im Widerspruch zu  $m \leq 3n - 6$  steht. ■

**Definition 2.15.** Seien  $G = (V, E)$  und  $H$  Graphen und seien  $u, v \in V$ .

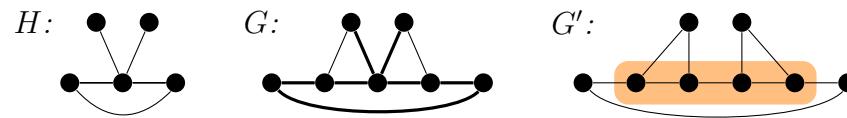
- Durch **Fusion** von  $u$  und  $v$  entsteht aus  $G$  der Graph  $G_{uv} = (V - \{v\}, E')$  mit

$$E' = \{e \in E \mid v \notin e\} \cup \{\{u, v'\} \mid \{v, v'\} \in E - \{u, v\}\}.$$

Ist  $e = \{u, v\}$  eine Kante von  $G$  (also  $e \in E$ ), so sagen wir auch,  $G_{uv}$  entsteht aus  $G$  durch **Kontraktion** der Kante  $e$ . Hat zudem  $v$  den Grad 2, so sagen wir auch,  $G_{uv}$  entsteht aus  $G$  durch **Überbrückung** des Knotens  $v$ .

- $G$  heißt zu  $H$  **kontrahierbar**, falls  $H$  aus einer isomorphen Kopie von  $G$  durch wiederholte Kontraktionen gewonnen werden kann.
- $G$  heißt **Unterteilung** von  $H$ , falls  $H$  aus einer isomorphen Kopie von  $G$  durch wiederholte Überbrückungen gewonnen werden kann.
- $H$  heißt **Minor** von  $G$ , wenn ein Teilgraph von  $G$  zu  $H$  kontrahierbar ist, und **topologischer Minor**, wenn ein Teilgraph von  $G$  eine Unterteilung von  $H$  ist.
- $G$  heißt  **$H$ -frei**, falls  $H$  kein Minor von  $G$  ist. Für eine Menge  $\mathcal{H}$  von Graphen heißt  $G$   **$\mathcal{H}$ -frei**, falls  $G$  für alle  $H \in \mathcal{H}$   $H$ -frei ist.

**Beispiel 2.16.** Betrachte folgende Graphen:



Offensichtlich ist  $G$  keine Unterteilung von  $H$ . Entfernen wir jedoch die beiden dünnen Kanten aus  $G$ , so ist der resultierende Teilgraph eine Unterteilung von  $H$ , d.h.  $H$  ist ein topologischer Minor von  $G$ . Dagegen ist kein Teilgraph von  $G'$  isomorph zu einer Unterteilung von  $H$  und somit ist  $H$  kein topologischer Minor von  $G'$ . Wenn wir aber die vier umrandeten Knoten von  $G'$  fusionieren, entsteht ein zu  $H$  isomorpher Graph, d.h.  $H$  ist ein Minor von  $G'$ .  $\triangleleft$

Nach Definition lässt sich jeder (topologische) Minor  $H$  von  $G$  aus einem zu  $G$  isomorphen Graphen durch wiederholte Anwendung folgender Operationen gewinnen:

- Entfernen einer Kante oder eines Knoten,
- Kontraktion einer Kante (bzw. Überbrückung eines Knoten).

Da die Kontraktionen (bzw. Überbrückungen) o.B.d.A. auch zuletzt ausgeführt werden können, gilt hiervon auch die Umkehrung. Zudem ist leicht zu sehen, dass  $G$  und  $H$  genau dann (topologische) Minoren voneinander sind, wenn sie isomorph sind.

**Satz 2.17** (Kempe 1878, Heawood 1890).

Jeder planare Graph ist 5-färbbar.

*Beweis.* Wir beweisen den Satz durch Induktion über  $n$ .

$n = 1$ : Klar.

$n - 1 \rightsquigarrow n$ : Da  $G$  planar ist, existiert ein Knoten  $u$  mit  $\deg(u) \leq 5$ .

Im Fall  $\deg(u) \leq 4$  entfernen wir  $u$  aus  $G$ . Andernfalls hat  $u$  zwei Nachbarn  $v$  und  $w$ , die nicht durch eine Kante verbunden sind (andernfalls wäre  $K_5$  ein Teilgraph von  $G$ ). In diesem Fall

entfernen wir alle mit  $u$  inzidenten Kanten außer  $\{u, v\}$  und  $\{u, w\}$  und kontrahieren diese beiden Kanten zum Knoten  $v$ .

Der resultierende Graph  $G'$  ist ein Minor von  $G$  und daher planar. Da  $G'$  zudem höchstens  $n - 1$  Knoten hat, existiert nach IV eine 5-Färbung  $c'$  für  $G'$ . Da wir im 2. Fall dem Knoten  $w$  die Farbe  $c'(v)$  geben können, haben die Nachbarn von  $u$  höchstens 4 verschiedene Farben und wir können  $G$  5-färben. ■

Kuratowski konnte 1930 beweisen, dass jeder nichtplanare Graph  $G$  den  $K_{3,3}$  oder den  $K_5$  als topologischen Minor enthält. Für den Beweis benötigen wir noch folgende Notationen.

**Definition 2.18.** Sei  $G$  ein Graph und sei  $K$  ein Kreis in  $G$ . Ein Teilgraph  $B$  von  $G$  heißt **Brücke** von  $K$  in  $G$ , falls

- $B$  nur aus einer Kante besteht, die zwei Knoten von  $K$  verbindet, aber nicht auf  $K$  liegt, oder
- $B - K$  eine Zusammenhangskomponente von  $G - K$  ist und  $B$  aus  $B - K$  durch Hinzufügen aller Kanten zwischen  $B - K$  und  $K$  (und der zugehörigen Endpunkte auf  $K$ ) entsteht.

Die Knoten von  $B$ , die auf  $K$  liegen, heißen **Kontaktpunkte** von  $B$ . Zwei Brücken  $B$  und  $B'$  von  $K$  heißen **inkompatibel**, falls

- $B$  Kontaktpunkte  $u, v$  und  $B'$  Kontaktpunkte  $u', v'$  hat, so dass diese vier Punkte in der Reihenfolge  $u, u', v, v'$  auf  $K$  liegen, oder
- $B$  und  $B'$  mindestens 3 gemeinsame Kontaktpunkte haben.

Es ist leicht zu sehen, dass sich in einem planaren Graphen  $G$  die Brücken jedes Kreises  $K$  in höchstens zwei Mengen partitionieren lassen, so dass jede Menge nur kompatible Brücken enthält.

**Satz 2.19** (Kuratowski 1930).

Für einen Graphen  $G$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $G$  ist planar.
- (ii)  $G$  enthält weder den  $K_{3,3}$  noch den  $K_5$  als topologischen Minor.

*Beweis.* Die Implikation von *i)* nach *ii)* folgt aus der Tatsache, dass die Klasse  $\mathcal{K}$  der planaren Graphen unter (topologischer) Minorenbildung abgeschlossen ist (d.h. wenn  $G \in \mathcal{K}$  und  $H$  ein Minor von  $G$  ist, dann folgt  $H \in \mathcal{K}$ ).

Die Implikation von *ii)* nach *i)* zeigen wir durch Kontraposition. Sei also  $G = (V, E)$  nicht planar. Dann hat  $G$  einen 3-zusammenhängenden nicht planaren topologischen Minor  $G' = (V', E')$ , so dass  $G' - e'$  für jede Kante  $e' \in E'$  planar ist (siehe Übungen). Wir entfernen eine beliebige Kante  $e_0 = \{a_0, b_0\}$  aus  $G'$ . Da  $G'$  mindestens 5 Knoten hat, ist  $G' - e_0$  2-zusammenhängend. Daher gibt es in  $G' - e_0$  einen Kreis  $K$  durch die beiden Knoten  $a_0$  und  $b_0$ . Wir wählen  $K$  zusammen mit einer ebenen Realisierung  $H'$  von  $G' - e_0$  so, dass  $K$  möglichst viele Gebiete in  $H'$  einschließt.

Die Kanten jeder Brücke  $B$  von  $K$  in  $G' - e_0$  verlaufen entweder alle innerhalb oder alle außerhalb von  $K$  in  $H'$ . Im ersten Fall nennen wir  $B$  eine **innere Brücke** und im zweiten eine **äußere Brücke**. Für zwei Knoten  $a, b$  auf  $K$  bezeichnen wir mit  $K[a, b]$  die Menge aller Knoten, die auf dem Bogen von  $a$  nach  $b$  (im Uhrzeigersinn) auf  $K$  liegen. Zudem sei  $K[a, b] = K[a, b] \setminus \{b\}$ . Die Mengen  $K(a, b)$  und  $K(a, b)$  sind analog definiert.

**Behauptung 2.20.** Jede äußere Brücke  $B$  besteht aus einer Kante  $\{u, v\}$ , die zwei Knoten  $u \in K(a_0, b_0)$  und  $v \in K(b_0, a_0)$  verbindet.

Zum Beweis der Behauptung nehmen wir an, dass  $B$  mindestens einen Kontaktspunkt in  $\{a_0, b_0\}$  oder mehr als 2 Kontaktspunkte hat. Dann liegen mindestens zwei dieser Punkte auf  $K[a_0, b_0]$  oder auf  $K[b_0, a_0]$ . Folglich kann  $K$  zu einem Kreis  $K'$  erweitert werden, der in  $H'$  mehr Gebiete einschließt (bzw. ausschließt) als  $K$ , was der Wahl von  $K$  und  $H'$  widerspricht.

Im Graphen  $G'$  hat  $K$  außer den Brücken in  $G' - e_0$  noch zusätzlich die Kante  $e_0$  als Brücke. Nun wählen wir eine innere Brücke  $B$ , die sowohl zu  $e_0$  als auch zu mindestens einer äußeren Brücke  $e_1 = \{a_1, b_1\}$

inkompatibel ist. Eine solche Brücke  $B$  muss es geben, da wir sonst alle mit  $e_0$  inkompatiblen inneren Brücken nach außen klappen und  $e_0$  als innere Brücke hinzunehmen könnten, ohne die Planarität zu verletzen.

Wir benutzen  $K$  und die drei Brücken  $e_0, e_1$  und  $B$ , um eine Unterteilung des  $K_{3,3}$  oder des  $K_5$  in  $G'$  zu finden. Hierzu geben wir entweder zwei disjunkte Mengen  $A_1, A_2 \subseteq V'$  mit jeweils 3 Knoten an, so dass 9 knotendisjunkte Pfade zwischen allen Knoten  $a \in A_1$  und  $b \in A_2$  existieren. Oder wir geben eine Menge  $A \subseteq V'$  mit fünf Knoten an, so dass 10 knotendisjunkte Pfade zwischen je zwei Knoten  $a, b \in A$  existieren. Da  $e_0$  und  $e_1$  inkompatibel sind, können wir annehmen, dass die vier Knoten  $a_0, a_1, b_0, b_1$  in dieser Reihenfolge auf  $K$  liegen.

**Fall 1:**  $B$  hat einen Kontaktspunkt  $k_1 \notin \{a_0, a_1, b_0, b_1\}$ . Aus Symmetriegründen können wir  $k_1 \in K(a_0, a_1)$  annehmen. Da  $B$  weder zu  $e_0$  noch zu  $e_1$  kompatibel ist, hat  $B$  weitere Kontaktspunkte  $k_2 \in K(b_0, a_0)$  und  $k_3 \in K(a_1, b_1)$ , wobei  $k_2 = k_3$  sein kann.

**Fall 1a:** Ein Knoten  $k_i \in \{k_2, k_3\}$  liegt auf dem Bogen  $K(b_0, b_1)$ . In diesem Fall existieren 9 knotendisjunkte Pfade zwischen  $\{a_0, a_1, k_i\}$  und  $\{b_0, b_1, k_1\}$ .

**Fall 1b:**  $K(b_0, b_1) \cap \{k_2, k_3\} = \emptyset$ . In diesem Fall ist  $k_2 \in K[b_1, a_0]$  und  $k_3 \in K(a_1, b_0]$ . Dann gibt es in  $B$  einen Knoten  $u$ , von dem aus 3 knotendisjunkte Pfade zu  $\{k_1, k_2, k_3\}$  existieren. Folglich gibt es 9 knotendisjunkte Pfade zwischen  $\{a_0, a_1, u\}$  und  $\{k_1, k_2, k_3\}$ .

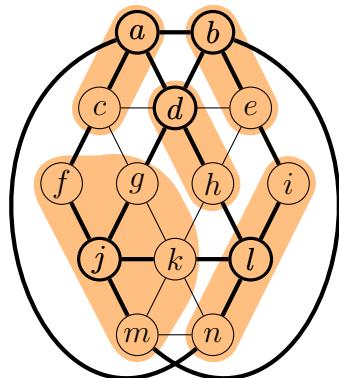
**Fall 2:** Alle Kontaktspunkte von  $B$  liegen in der Menge  $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$ . Da  $B$  inkompatibel zu  $e_0$  und  $e_1$  ist, müssen in diesem Fall alle vier Punkte zu  $B$  gehören. Sei  $P_0$  ein  $a_0$ - $b_0$ -Pfad in  $B$  und sei  $P_1$  ein  $a_1$ - $b_1$ -Pfad in  $B$ . Sei  $u$  der erste Knoten auf  $P_0$ , der auch auf  $P_1$  liegt und sei  $v$  der letzte solche Knoten.

**Fall 2a:**  $u = v$ . Dann gibt es in  $B$  vier knotendisjunkte Pfade von  $u$  zu  $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$  und somit existieren in  $G'$  10 knotendisjunkte Pfade zwischen den Knoten  $u, a_0, a_1, b_0, b_1$ .

**Fall 2b:**  $u \neq v$ . Durch  $u$  und  $v$  wird der Pfad  $P_1$  in drei Teilpfade  $P_{xu}$ ,  $P_{uv}$  und  $P_{vy}$  unterteilt, wobei die Indizes die Endpunkte bezeichnen und  $\{x, y\} = \{a_1, b_1\}$  ist.

Somit gibt es in  $B$  drei Pfade zwischen  $u$  und jedem Knoten in  $\{a_0, v, x\}$  und zwei Pfade zwischen  $v$  und jedem Knoten in  $\{b_0, y\}$ , die alle 5 knotendisjunkt sind. Folglich gibt es in  $G'$  9 knotendisjunkte Pfade zwischen  $\{a_0, v, x\}$  und  $\{b_0, y, u\}$ . ■

**Beispiel 2.21.** Betrachte den Graphen



Dieser ist nicht planar, da wir den  $K_5$  durch Kontraktion der farblich unterlegten Teilgraphen als Minor von  $G$  erhalten.

Alternativ lässt sich der  $K_5$  auch als ein topologischer Minor von  $G$  erhalten, indem wir die dünnen Kanten entfernen und in dem resultierenden Teilgraphen alle Knoten vom Grad 2 überbrücken.  $\triangleleft$

Eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz von Kuratowski ist folgende Charakterisierung der Klasse der planaren Graphen.

**Korollar 2.22** (Wagner 1937). Ein Graph ist genau dann planar, wenn er  $\{K_{3,3}, K_5\}$ -frei ist.

**Definition 2.23.** Sei  $\langle$  eine binäre Relation auf einer Menge  $A$ .

- a)  $(A, \lesssim)$  heißt **Quasiordnung**, wenn  $\lesssim$  reflexiv und transitiv auf  $A$  ist.
  - b)  $(A, \lesssim)$  heißt **Wohlquasiordnung**, wenn es zudem zu jeder unendlichen Folge  $a_1, a_2, \dots$  von Elementen aus  $A$  Indizes  $i < j$  mit  $a_i \lesssim a_j$  gibt.

Beispiele für Quasiordnungen sind  $a \lesssim b : \Leftrightarrow |a| \leq |b|$  auf den ganzen oder komplexen Zahlen. Im ersten Fall handelt es sich um eine Wohlquasiordnung, im zweiten nicht, da zum Beispiel die Folge  $a_i = (i+1)/i$  eine unendliche **absteigende Kette** bildet (d.h.  $a_{i+1} \lesssim a_i$  und  $a_i \not\lesssim a_{i+1}$  für alle  $i \geq 1$ ).  $(\mathbb{N}, \leq)$  ist eine Wohlquasiordnung (sogar eine lineare Wohlordnung, da auch antisymmetrisch und konnex). Die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen ist dagegen keine Wohlquasiordnung, da mit der Folge der Primzahlen eine unendliche **Antikette** existiert (d.h. die Glieder der Folge sind paarweise unvergleichbar: es gilt  $a_i \not\lesssim a_j$  und  $a_i \not\lesssim a_i$  für alle  $i > j \geq 1$ ).

Es ist leicht zu sehen, dass die Minorenrelation auf der Menge aller endlichen ungerichteten Graphen keine unendlichen absteigenden Ketten hat. Gemäß folgender Proposition ist sie daher genau dann eine Wohlquasiordnung, wenn es auch keine unendlichen Antiketten gibt.

**Proposition 2.24.** Eine Quasiordnung  $(A, \lesssim)$  ist genau dann eine Wohlquasiordnung, wenn es in  $(A, \lesssim)$  weder unendliche absteigende Ketten noch unendliche Antiketten gibt.

*Beweis.* Siehe Übungen.

**Satz 2.25** (Satz von Robertson und Seymour, 1983-2004). *Die Minor-Relation bildet auf der Menge aller endlichen ungerichteten Graphen eine Wohlquasiordnung.*

**Korollar 2.26.** Sei  $\mathcal{K}$  eine Graphklasse, die unter Minorenbildung abgeschlossen ist. Dann gibt es eine endliche Menge  $\mathcal{H}$  von Graphen mit

$$\mathcal{K} = \{G \mid G \text{ ist } \mathcal{H}\text{-frei}\}.$$

Die Graphen in  $\mathcal{H}$  sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und heißen **verbogene Minoren** für die Klasse  $\mathcal{K}$ .

Für den Beweis des Korollars betrachten wir die komplementäre Klasse  $\bar{\mathcal{K}}$  aller endlichen Graphen, die nicht zu  $\mathcal{K}$  gehören, und zeigen, dass  $\bar{\mathcal{K}}$  bis auf Isomorphie nur endlich viele minimale Elemente hat. Sei  $\mathcal{M}$  die Menge aller minimalen Elemente von  $\bar{\mathcal{K}}$  und entstehe  $\mathcal{H}$  aus  $\mathcal{M}$ , indem wir aus jeder Isomorphieklassse einen Graphen auswählen. Dann hat jeder Graph  $G \in \bar{\mathcal{K}}$  einen Minor in  $\mathcal{H}$  und umgekehrt gehört jeder Graph  $G$ , der einen Minor in  $\mathcal{H}$  hat, zu  $\bar{\mathcal{K}}$ , d.h.

$$\bar{\mathcal{K}} = \{G \mid \exists H \in \mathcal{H} : H \text{ ist ein Minor von } G\}.$$

Da zudem  $\mathcal{H}$  eine Antikette bildet, muss  $\mathcal{H}$  nach Satz 2.25 endlich sein, womit Korollar 2.26 bewiesen ist.

Das Problem, für zwei gegebene Graphen  $G$  und  $H$  zu entscheiden, ob  $H$  ein Minor von  $G$  ist, ist zwar NP-vollständig (da sich das Hamiltonkreisproblem darauf reduzieren lässt). Für einen festen Graphen  $H$  ist das Problem dagegen effizient entscheidbar.

**Satz 2.27** (Robertson und Seymour, 1995). *Für jeden Graphen  $H$  gibt es einen  $O(n^3)$ -zeitbeschränkten Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen  $G$  entscheidet, ob er  $H$ -frei ist.*

**Korollar 2.28.** *Die Zugehörigkeit zu jeder unter Minorenbildung abgeschlossenen Graphklasse  $\mathcal{K}$  ist in P entscheidbar.*

Der Entscheidungsalgorithmus für  $\mathcal{K}$  lässt sich allerdings nur angeben, wenn wir die verbotenen Minoren für  $\mathcal{K}$  kennen. Leider ist der Beweis von Theorem 2.25 in dieser Hinsicht nicht konstruktiv, so dass der Nachweis, dass  $\mathcal{K}$  unter Minorenbildung abgeschlossen ist, nicht automatisch zu einem effizienten Erkennungsalgorithmus für  $\mathcal{K}$  führt.