Vorlesungsskript

Graphalgorithmen

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Johannes Köbler
Sebastian Kuhnert
Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

27. April 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Graphentheoretische Grundlagen

Definition 1.1. *Ein* ***(ungerichteter) Graph*** *ist ein Paar* $G = (V, E)$*, wobei*

V - *eine endliche Menge von* ***Knoten/Ecken*** *und*

E - *die Menge der* ***Kanten*** *ist.*

Hierbei gilt

$$E \subseteq \binom{V}{2} = \Big\{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\Big\}.$$

Sei $v \in V$ *ein Knoten.*

a) Die ***Nachbarschaft*** *von* v *ist* $N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$.

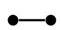
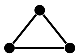
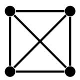
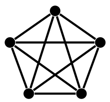
b) Der ***Grad*** *von* v *ist* $\deg_G(v) = \|N_G(v)\|$.

c) Der ***Minimalgrad*** *von* G *ist* $\delta(G) = \min_{v\in V} \deg_G(v)$ *und der* ***Maximalgrad*** *von* G *ist* $\Delta(G) = \max_{v\in V} \deg_G(v)$.

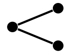
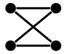
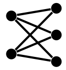
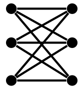
Falls G aus dem Kontext ersichtlich ist, schreiben wir auch einfach $N(v)$, $\deg(v)$, δ usw.

Beispiel 1.2.

- *Der* ***vollständige Graph*** (V, E) *auf* n *Knoten, d.h.* $\|V\| = n$ *und* $E = \binom{V}{2}$*, wird mit* K_n *und der* ***leere Graph*** $(V, \emptyset)$ *auf* n *Knoten wird mit* E_n *bezeichnet.*

K_1:  K_2:  K_3:  K_4:  K_5: 

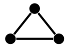
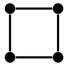
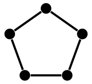
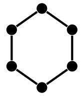
- *Der* ***vollständige bipartite Graph*** (A, B, E) *auf* $a + b$ *Knoten, d.h.* $A \cap B = \emptyset$, $\|A\| = a$, $\|B\| = b$ *und* $E = \{\{u, v\} \mid u \in A, v \in B\}$ *wird mit* $\boldsymbol{K_{a,b}}$ *bezeichnet.*

$K_{1,1}$:  $K_{1,2}$:  $K_{2,2}$:  $K_{2,3}$:  $K_{3,3}$: 

- *Der* ***Pfad*** *mit* n *Knoten wird mit* P_n *bezeichnet.*

P_2:  P_3:  P_4:  P_5: 

- *Der* ***Kreis*** *mit* n *Knoten wird mit* C_n *bezeichnet.*

C_3:  C_4:  C_5:  C_6: 

Definition 1.3. *Sei* $G = (V, E)$ *ein Graph.*

a) Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ *heißt* ***unabhängig*** *oder* ***stabil****, wenn es keine Kante von* G *mit beiden Endpunkten in* U *gibt, d.h. es gilt* $E \cap \binom{U}{2} = \emptyset$*. Die* ***Stabilitätszahl*** *ist*

$$\alpha(G) = \max\{\|U\| \mid U \text{ ist stabile Menge in } G\}.$$

b) Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ *heißt* ***Clique****, wenn jede Kante mit beiden Endpunkten in* U *in* E *ist, d.h. es gilt* $\binom{U}{2} \subseteq E$*. Die* ***Cliquenzahl*** *ist*

$$\omega(G) = \max\{\|U\| \mid U \text{ ist Clique in } G\}.$$

c) Ein Graph $G' = (V', E')$ *heißt* ***Sub-/Teil-/Untergraph*** *von* G*, falls* $V' \subseteq V$ *und* $E' \subseteq E$ *ist. Im Fall* $V' = V$ *schreiben wir für* G' *auch* $G - E''$ *(bzw.* $G = G' \cup E''$*), wobei* $E'' = E - E'$ *die Menge der aus* G *entfernten Kanten ist. Im Fall* $E'' = \{e\}$ *schreiben wir für* G' *auch einfach* $G - e$ *(bzw.* $G = G' \cup e$*).*

d) Ein Subgraph $G' = (V', E')$ *heißt (****durch*** $\boldsymbol{V'}$*)* ***induziert****, falls* $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ *ist. Für* G' *schreiben wir dann auch* $G[V']$ *oder* $G - V''$*, wobei* $V'' = V - V'$ *die Menge der aus* G *entfernten Knoten ist. Im Fall* $V'' = \{v\}$ *schreiben wir für* G' *auch einfach* $G - v$*.*

e) *Ein* ***Weg*** *ist eine Folge von (nicht notwendig verschiedenen) Knoten* $v_0, \ldots, v_\ell$ *mit* $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ *für* $i = 0, \ldots, \ell-1$, *der jede Kante* $e \in E$ *höchstens einmal durchläuft. Die* ***Länge*** *des Weges ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten, also* ℓ. *Im Fall* $\ell = 0$ *heißt der Weg* ***trivial***. *Ein Weg* $v_0, \ldots, v_\ell$ *heißt auch* $\boldsymbol{v_0}$***-***$\boldsymbol{v_\ell}$***-Weg***.

f) *Ein Graph* $G = (V, E)$ *heißt* ***zusammenhängend***, *falls es für alle Paare* $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ *einen u-v-Weg gibt. G heißt* ***k-fach zusammenhängend***, $1 < k < n$, *falls G nach Entfernen von beliebigen* $l \le \min\{n-1, k-1\}$ *Knoten immer noch zusammenhängend ist.*

g) *Ein* ***Zyklus*** *ist ein u-v-Weg der Länge* $\ell \ge 2$ *mit* $u = v$.

h) *Ein Weg heißt* ***einfach*** *oder* ***Pfad***, *falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.*

i) *Ein* ***Kreis*** *ist ein Zyklus* $v_0, v_1 \ldots, v_{\ell-1}, v_0$ *der Länge* $\ell \ge 3$, *für den* $v_0, v_1, \ldots, v_{\ell-1}$ *paarweise verschieden sind.*

j) *Ein Graph* $G = (V, E)$ *heißt* ***kreisfrei***, ***azyklisch*** *oder* ***Wald***, *falls er keinen Kreis enthält.*

k) *Ein* ***Baum*** *ist ein zusammenhängender Wald.*

l) *Jeder Knoten* $u \in V$ *vom Grad* $\deg(u) \le 1$ *heißt* ***Blatt*** *und die übrigen Knoten (vom Grad* ≥ 2*) heißen* ***innere Knoten***.

Es ist leicht zu sehen, dass die Relation

$$Z = \{(u, v) \in V \times V \mid \text{ es gibt in } G \text{ einen } u\text{-}v\text{-Weg}\}$$

eine Äquivalenzrelation ist. Die durch die Äquivalenzklassen von Z induzierten Teilgraphen heißen die ***Zusammenhangskomponenten*** (engl. *connected components*) von G.

Definition 1.4. *Ein* **gerichteter Graph** *oder* **Digraph** *ist ein Paar* $G = (V, E)$, *wobei*

V - *eine endliche Menge von* **Knoten/Ecken** *und*

E - *die Menge der* **Kanten** *ist.*

Hierbei gilt

$$E \subseteq V \times V = \Big\{(u, v) \mid u, v \in V\Big\},$$

wobei E auch Schlingen (u, u) *enthalten kann. Sei* $v \in V$ *ein Knoten.*

a) *Die* **Nachfolgermenge** *von v ist* $N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$.

b) *Die* **Vorgängermenge** *von v ist* $N^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$.

c) *Die* **Nachbarmenge** *von v ist* $N(v) = N^+(v) \cup N^-(v)$.

d) *Der* **Ausgangsgrad** *von v ist* $\deg^+(v) = \|N^+(v)\|$ *und der* **Eingangsgrad** *von v ist* $\deg^-(v) = \|N^-(v)\|$. *Der* **Grad** *von v ist* $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$.

e) *Ein* **(gerichteter)** $\boldsymbol{v_0}$**-**$\boldsymbol{v_\ell}$**-Weg** *ist eine Folge von Knoten* $v_0, \ldots, v_\ell$ *mit* $(v_i, v_{i+1}) \in E$ *für* $i = 0, \ldots, \ell - 1$, *der jede Kante* $e \in E$ *höchstens einmal durchläuft.*

f) *Ein* **(gerichteter) Zyklus** *ist ein gerichteter u-v-Weg der Länge* $\ell \ge 1$ *mit* $u = v$.

g) *Ein gerichteter Weg heißt* **einfach** *oder* **(gerichteter) Pfad**, *falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.*

h) *Ein* **(gerichteter) Kreis** *in G ist ein gerichteter Zyklus* $v_0, v_1 \ldots, v_{\ell-1}, v_0$ *der Länge* $\ell \ge 1$, *für den* $v_0, v_1, \ldots, v_{\ell-1}$ *paarweise verschieden sind.*

i) *G heißt* **kreisfrei** *oder* **azyklisch**, *wenn es in G keinen gerichteten Kreis gibt.*

j) *G heißt* **stark zusammenhängend**, *wenn es in G für jedes Knotenpaar* $u \ne v \in V$ *sowohl einen u-v-Pfad als auch einen v-u-Pfad gibt.*

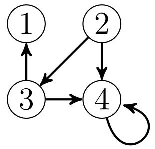
Sei $G = (V, E)$ ein Graph bzw. Digraph und sei $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann ist die $(n \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})$ mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

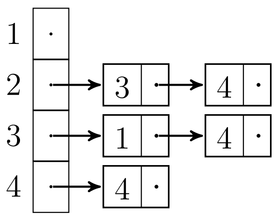
die ***Adjazenzmatrix*** von G. Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenzmatrix symmetrisch mit $a_{ii} = 0$ für $i = 1, \dots, n$.

Bei der ***Adjazenzlisten-Darstellung*** wird für jeden Knoten v_i eine Liste mit seinen Nachbarn verwaltet. Im gerichteten Fall verwaltet man entweder nur die Liste der Nachfolger oder zusätzlich eine weitere für die Vorgänger. Falls die Anzahl der Knoten statisch ist, organisiert man die Adjazenzlisten in einem Feld, d.h. das Feldelement mit Index i verweist auf die Adjazenzliste von Knoten v_i. Falls sich die Anzahl der Knoten dynamisch ändert, so werden die Adjazenzlisten typischerweise ebenfalls in einer doppelt verketteten Liste verwaltet.

Beispiel 1.5.
Betrachte den gerichteten Graphen $G = (V, E)$ *mit* $V = \{1, 2, 3, 4\}$ *und* $E = \{(2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 4)\}$. *Dieser hat folgende Adjazenzmatrix- und Adjazenzlisten-Darstellung:*



	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	1
4	0	0	0	1



◁

2 Färben von Graphen

Definition 2.1. *Sei* $G = (V, E)$ *ein Graph und sei* $k \in \mathbb{N}$.

a) Eine Abbildung $f\colon V \to \mathbb{N}$ *heißt* ***Färbung*** *von* G*, wenn* $f(u) \neq f(v)$ *für alle* $\{u, v\} \in E$ *gilt.*

b) G *heißt* ***k-färbbar****, falls eine Färbung* $f\colon V \to \{1, \dots, k\}$ *existiert.*

c) Die ***chromatische Zahl*** *ist*

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}.$$

Beispiel 2.2.

$$\chi(E_n) = 1,\ \chi(K_{n,m}) = 2,\ \chi(K_n) = n,$$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade} \\ 3, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein wichtiges Entscheidungsproblem ist, ob ein gegebener Graph k-färbbar ist. Dieses Problem ist für jedes feste $k \geq 3$ schwierig.

k-Färbbarkeit (k-Coloring):

Gegeben: Ein Graph G.
Gefragt: Ist G k-färbbar?

Satz 2.3. k-Coloring *ist für* $k \geq 3$ NP-*vollständig.*

Das folgende Lemma setzt die chromatische Zahl $\chi(G)$ in Beziehung zur Stabilitätszahl $\alpha(G)$.

Lemma 2.4. $n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$.

Beweis. Sei G ein Graph und sei c eine $\chi(G)$-Färbung von G. Da dann die Mengen $S_i = \{u \in V \mid c(u) = i\}$, $i = 1, \ldots, \chi(G)$, stabil sind, folgt $\|S_i\| \leq \alpha(G)$ und somit gilt

$$n \;=\; \sum_{i=1}^{\chi(G)} \|S_i\| \;\leq\; \chi(G)\alpha(G).$$

Für den Beweis von $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$ sei S eine stabile Menge in G mit $\|S\| = \alpha(G)$. Dann ist $G - S$ k-färbbar für ein $k \leq n - \|S\|$. Da wir alle Knoten in S mit der Farbe $k + 1$ färben können, folgt $\chi(G) \leq k + 1 \leq n - \alpha(G) + 1$. ■

Beide Abschätzungen sind scharf, können andererseits aber auch beliebig schlecht werden.

Lemma 2.5. $\binom{\chi(G)}{2} \leq m$.

Beweis. Zwischen je zwei Farbklassen einer optimalen Färbung muss es mindestens eine Kante geben. ■

Die chromatische Zahl steht auch in Beziehung zur Cliquenzahl $\omega(G)$ und zum Maximalgrad $\Delta(G)$:

Lemma 2.6. $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Beweis. Die erste Ungleichung folgt daraus, dass die Knoten einer maximal großen Clique unterschiedliche Farben erhalten müssen.

Um die zweite Ungleichung zu erhalten, betrachte folgenden Färbungsalgorithmus:

Algorithmus `greedy-color`

input `ein Graph` $G = (V, E)$ `mit` $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$
$c(v_1) := 1$
for $i := 2$ **to** n **do**
    $F_i := \{c(v_j) \mid j < i, v_j \in N(v_i)\}$
    $c(v_i) := \min\{k \geq 1 \mid k \notin F\}$

Da für die Farbe $c(v_i)$ von v_i nur $\|F_i\| \leq \Delta(G)$ Farben verboten sind, gilt $c(v_i) \leq \Delta(G) + 1$. ■

2.1 Färben von planaren Graphen

Ein Graph G heißt ***planar***, wenn er so in die Ebene einbettbar ist, dass sich zwei verschiedene Kanten höchstens in ihren Endpunkten berühren. Dabei werden die Knoten von G als Punkte und die Kanten von G als Verbindungslinien zwischen den zugehörigen Endpunkten dargestellt.

Bereits im 19. Jahrhundert wurde die Frage aufgeworfen, wie viele Farben höchstens benötigt werden, um eine Landkarte so zu färben, dass aneinander grenzende Länder unterschiedliche Farben erhalten. Offensichtlich lässt sich eine Landkarte in einen planaren Graphen transformieren, indem man für jedes Land einen Knoten zeichnet und benachbarte Länder durch eine Kante verbindet. Länder, die sich nur in einem Punkt berühren, gelten dabei nicht als benachbart.

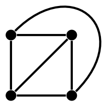
Die Vermutung, dass 4 Farben ausreichen, wurde 1878 von Kempe „bewiesen“ und erst 1890 entdeckte Heawood einen Fehler in Kempes „Beweis“. Übrig blieb der *5-Farben-Satz*. Der *4-Farben-Satz* wurde erst 1976 von Appel und Haken bewiesen. Hierbei handelt es sich jedoch nicht um einen Beweis im klassischen Sinne, da zur Überprüfung der vielen auftretenden Spezialfälle Computer benötigt werden.

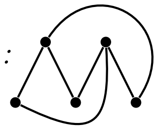
Satz 2.7 (Appel, Haken 1976)**.**
Jeder planare Graph ist 4-färbbar.

Aus dem Beweis des 4-Farben-Satzes von Appel und Haken lässt sich ein 4-Färbungsalgorithmus für planare Graphen mit einer Laufzeit von $\mathcal{O}(n^4)$ gewinnen.

In 1997 fanden Robertson, Sanders, Seymour und Thomas einen einfacheren Beweis für den 4-Farben-Satz, welcher zwar einen deutlich schnelleren $\mathcal{O}(n^2)$ Algorithmus liefert, aber auch nicht ohne Computer-Unterstützung verifizierbar ist.

Beispiel 2.8. *Wie die folgenden Einbettungen von K_4 und $K_{2,3}$ in die Ebene zeigen, sind K_4 und $K_{2,3}$ planar.*

K_4: 

$K_{2,3}$: 

◁

Um eine Antwort auf die Frage zu finden, ob auch K_5 und $K_{3,3}$ planar sind, betrachten wir die Gebiete von in die Ebene eingebetteten Graphen.

Durch die Kanten eines eingebetteten Graphen wird die Ebene in so genannte ***Gebiete*** unterteilt. Nur eines dieser Gebiete ist unbeschränkt und dieses wird als ***äußeres Gebiet*** bezeichnet. Die Anzahl der Gebiete von G bezeichnen wir mit $r(G)$ oder kurz mit r. Der ***Rand*** $rand(g)$ eines Gebiets g ist die (zirkuläre) Folge aller Kanten, die an g grenzen, wobei jede Kante so durchlaufen wird, dass g „in Fahrtrichtung links“ liegt bzw. bei Erreichen eines Knotens über eine Kante e, u über die im Uhrzeigersinn nächste Kante e' wieder verlassen wird. Die Anzahl der an ein Gebiet g grenzenden Kanten bezeichnen wir mit $d(g)$, wobei Kanten, die nur an g und an kein anderes Gebiet grenzen, doppelt gezählt werden.

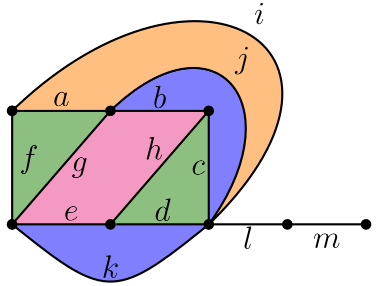
Die Gesamtzahl $\sum_g d(g)$ aller Inzidenzen von Gebieten und Kanten bezeichnen wir mit $i(G)$. Da jede Kante genau 2 Inzidenzen zu dieser Summe beiträgt, folgt

$$\sum_g d(g) = i(G) = 2m(G).$$

Ein ***ebener Graph*** wird durch das Tripel $G = (V, E, R)$ beschrieben, wobei R aus den Rändern aller Gebiete von G besteht. Wir nennen

G auch ***ebene Realisierung*** des Graphen (V, E). Durch R ist für jeden Knoten u die (zirkuläre) Ordnung π auf allen mit u inzidenten Kanten eindeutig festgelegt (und umgekehrt). Man nennt π das zu G gehörige ***Rotationssystem***. Dieses kann bei Verwendung der Adjazenzlistendarstellung ohne zusätzlichen Platzaufwand gespeichert werden, indem man die zu u adjazenten Knoten gemäß π anordnet.

Beispiel 2.9. *Nebenstehender ebener Graph hat 13 Kanten $a, \ldots, m$ und 7 Gebiete mit den Rändern*



$$\begin{aligned} R = \{&(a, f, g), (a, j, i), (b, g, e, h),\\ &(b, c, j), (c, h, d), (d, e, k),\\ &(f, i, l, m, m, l, k)\}. \end{aligned}$$

Das zugehörige Rotationssystem ist

$$\begin{aligned} \pi = \{&(a, f, i), (a, j, b, g), (b, c, h), (e, k, f, g), (d, e, h),\\ &(c, j, i, l, k, d), (l, m), (m)\}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass sowohl in R als auch in π jede Kante genau zweimal vorkommt. ◁

Satz 2.10 (Polyederformel von Euler, 1750)**.**
Für einen zusammenhängenden ebenen Graphen $G = (V, E, R)$ gilt

$$n(G) - m(G) + r(G) = 2. \qquad (*)$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über die Kantenzahl $m(G) = m$.

$m = 0$**:** Da G zusammenhängend ist, muss dann $n = 1$ sein.
Somit ist auch $r = 1$, also $(*)$ erfüllt.

$m - 1 \rightsquigarrow m$**:** Sei G ein zusammenhängender ebener Graph mit m Kanten.

Ist G ein Baum, so entfernen wir ein Blatt und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen G' mit $n' = n - 1$ Knoten, $m' = m - 1$ Kanten und $r' = r$ Gebieten. Nach IV folgt $n - m + r = (n-1) - (m-1) + r = n' - m' + r' = 2$.

Falls G kein Baum ist, entfernen wir eine Kante auf einem Kreis in G und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen G' mit $n' = n$ Knoten, $m' = m - 1$ Kanten und $r' = r - 1$ Gebieten. Nach IV folgt $n - m + r = n - (m-1) + (r-1) = n' - m' + r' = 2$. ■

Korollar 2.11. *Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Dann ist $m \leq 3n - 6$. Falls G dreiecksfrei ist, gilt sogar $m \leq 2n - 4$.*

Beweis. O.B.d.A. sei G zusammenhängend. Wir betrachten eine beliebige planare Einbettung von G. Da $n \geq 3$ ist, ist jedes Gebiet g von $d(g) \geq 3$ Kanten umgeben. Daher ist $2m = i = \sum_g d(g) \geq 3r$ bzw. $r \leq 2m/3$. Eulers Formel liefert

$$m = n + r - 2 \leq n + 2m/3 - 2,$$

was $(1 - 2/3)m \leq n - 2$ und somit $m \leq 3n - 6$ impliziert.

Wenn G dreiecksfrei ist, ist jedes Gebiet von $d(g) \geq 4$ Kanten umgeben. Daher ist $2m = i = \sum_g d(g) \geq 4r$ bzw. $r \leq m/2$. Eulers Formel liefert daher $m = n + r - 2 \leq n + m/2 - 2$, was $m/2 \leq n - 2$ und somit $m \leq 2n - 4$ impliziert. ■

Korollar 2.12. *K_5 ist nicht planar.*

Beweis. Wegen $n = 5$, also $3n - 6 = 9$, und wegen $m = \binom{5}{2} = 10$ gilt $m \not\leq 3n - 6$. ■

Korollar 2.13. *$K_{3,3}$ ist nicht planar.*

Beweis. Wegen $n = 6$, also $2n - 4 = 8$, und wegen $m = 3 \cdot 3 = 9$ gilt $m \not\leq 2n - 4$. ■

Als weitere interessante Folgerung aus der Polyederformel können wir zeigen, dass jeder planare Graph einen Knoten v vom Grad $\deg(v) \leq 5$ hat.

Lemma 2.14. *Jeder planare Graph hat einen Minimalgrad $\delta(G) \leq 5$.*

Beweis. Für $n \leq 6$ ist die Behauptung klar. Für $n > 6$ impliziert die Annahme $\delta(G) \geq 6$ die Ungleichung

$$m = \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{u \in V} \deg(u) \geq \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{u \in V} 6 = 3n,$$

was im Widerspruch zu $m \leq 3n - 6$ steht. ■

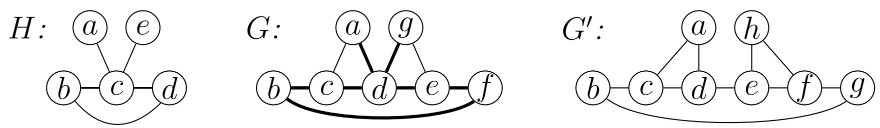
Definition 2.15. *Seien $G = (V, E)$ und H Graphen und seien $u, v \in V$.*

- *Durch **Fusion** von u und v entsteht aus G der Graph $G_{uv} = (V - \{v\}, E')$ mit*

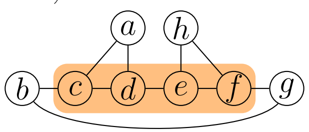
  $$E' = \{e \in E \mid v \notin e\} \cup \{\{u, v'\} \mid \{v, v'\} \in E - \{u, v\}\}.$$

  *Ist $e = \{u, v\}$ eine Kante von G (also $e \in E$), so sagen wir auch, G_{uv} entsteht aus G durch **Kontraktion** der Kante e. Hat zudem v den Grad 2, so sagen wir auch, G_{uv} entsteht aus G durch **Überbrückung** des Knotens v.*
- *G heißt zu H **kontrahierbar**, falls H aus einer isomorphen Kopie von G durch wiederholte Kontraktionen gewonnen werden kann.*
- *G heißt **Unterteilung** von H, falls H aus einer isomorphen Kopie von G durch wiederholte Überbrückungen gewonnen werden kann.*
- *H heißt **Minor** von G, wenn ein Teilgraph von G zu H kontrahierbar ist, und **topologischer Minor**, wenn ein Teilgraph von G eine Unterteilung von H ist.*
- *G heißt **H-frei**, falls H kein Minor von G ist. Für eine Menge $\mathcal{H}$ von Graphen heißt G **$\mathcal{H}$-frei**, falls G für alle $H \in \mathcal{H}$ H-frei ist.*

Beispiel 2.16. *Betrachte folgende Graphen:*



Offensichtlich ist G keine Unterteilung von H. Entfernen wir jedoch die beiden dünnen Kanten aus G, so ist der resultierende Teilgraph eine Unterteilung von H, d.h. H ist ein topologischer Minor von G. Dagegen ist kein Teilgraph von G' eine Unterteilung von H und somit ist H kein topologischer Minor von G'. Wenn wir aber die Knoten c, d, e, f von G' fusionieren,



entsteht ein zu H isomorpher Graph, d.h. H ist ein Minor von G'. ◁

Nach Definition lässt sich jeder (topologische) Minor H von G aus einem zu G isomorphen Graphen durch wiederholte Anwendung folgender Operationen gewinnen:

- Entfernen einer Kante oder eines Knoten,
- Kontraktion einer Kante (bzw. Überbrückung eines Knoten).

Da die Kontraktionen (bzw. Überbrückungen) o.B.d.A. auch zuletzt ausgeführt werden können, gilt hiervon auch die Umkehrung. Zudem ist leicht zu sehen, dass G und H genau dann (topologische) Minoren voneinander sind, wenn sie isomorph sind.

Satz 2.17 (Kempe 1878, Heawood 1890)**.**
Jeder planare Graph ist 5-färbbar.

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion über n.

$n = 1$**:** Klar.

$n - 1 \rightsquigarrow n$**:** Da G planar ist, existiert ein Knoten u mit $\deg(u) \leq 5$. Im Fall $\deg(u) \leq 4$ entfernen wir u aus G. Andernfalls hat u zwei Nachbarn v und w, die nicht durch eine Kante verbunden sind (andernfalls wäre K_5 ein Teilgraph von G). In diesem Fall entfernen wir alle mit u inzidenten Kanten außer $\{u, v\}$ und $\{u, w\}$ und fusionieren die drei Knoten u, v und w zu v.

Der resultierende Graph G' ist ein Minor von G und daher planar. Da G' zudem höchstens $n - 1$ Knoten hat, existiert nach IV eine 5-Färbung c' für G'. Da wir im 2. Fall dem Knoten w die Farbe $c'(v)$ geben können, haben die Nachbarn von u höchstens 4 verschiedene Farben und wir können G 5-färben. ■

Kuratowski konnte 1930 beweisen, dass jeder nichtplanare Graph G den $K_{3,3}$ oder den K_5 als topologischen Minor enthält. Für den Beweis benötigen wir noch folgende Notationen.

Definition 2.18. *Sei G ein Graph und sei K ein Kreis in G. Ein Teilgraph B von G heißt* ***Brücke*** *von K in G, falls*

- *B nur aus einer Kante besteht, die zwei Knoten von K verbindet, aber nicht auf K liegt, oder*
- *$B - K$ eine Zusammenhangskomponente von $G - K$ ist und B aus $B - K$ durch Hinzufügen aller Kanten zwischen $B - K$ und K (und der zugehörigen Endpunkte auf K) entsteht.*

Die Knoten von B, die auf K liegen, heißen ***Kontaktpunkte*** *von B. Zwei Brücken B und B' von K heißen* ***inkompatibel****, falls*

- *B Kontaktpunkte u, v und B' Kontaktpunkte u', v' hat, so dass diese vier Punkte in der Reihenfolge u, u', v, v' auf K liegen, oder*
- *B und B' mindestens 3 gemeinsame Kontaktpunkte haben.*

Es ist leicht zu sehen, dass sich in einem planaren Graphen G die Brücken jedes Kreises K in höchstens zwei Mengen partitionieren lassen, so dass jede Menge nur kompatible Brücken enthält.

Satz 2.19 (Kuratowski 1930)**.**
Für einen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) G ist planar.

(ii) G enthält weder den $K_{3,3}$ noch den K_5 als topologischen Minor.

Beweis. Die Implikation von i) nach ii) folgt aus der Tatsache, dass die Klasse der planaren Graphen unter (topologischer) Minorenbildung abgeschlossen ist.

Die Implikation von ii) nach i) zeigen wir durch Kontraposition. Sei also $G = (V, E)$ nicht planar. Dann hat G einen 3-zusammenhängenden nicht planaren topologischen Minor $G' = (V', E')$, so dass $G' - e'$ für jede Kante $e' \in E'$ planar ist (siehe Übungen). Wir entfernen eine beliebige Kante $e_0 = \{a_0, b_0\}$ aus G'. Da $G' - e_0$ 2-zusammenhängend ist, gibt es mindestens einen Kreis K durch die beiden Knoten a_0 und b_0 in $G' - e_0$. Wir wählen K zusammen mit einer ebenen Realisierung H' von $G' - e_0$ so, dass K möglichst viele Gebiete in H' einschließt (d.h. es gibt keinen Kreis K' durch a_0 und b_0 und keine ebene Realisierung H'' von $G' - e_0$, so dass K' in H'' mehr Gebiete als K in H' einschließt).

Die Kanten jeder Brücke B von K in $G' - e_0$ verlaufen entweder alle innerhalb oder alle außerhalb von K in H'. Im ersten Fall nennen wir B eine ***innere Brücke*** und im zweiten eine ***äußere Brücke***.