Übungsblatt 7

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 6. Juli 2017

Aufgabe 37 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass sich der Abstand $d_{i+1}(s,t)$ zwischen s und t im Restnetzwerk $N_{f_{i+1}}$ gegenüber $d_i(s,t)$ nicht unbedingt vergrößert, wenn auf den aktuellen Fluss f_i ein blockierender Fluss g_i des gesamten Restnetzwerks N_{f_i} anstelle des Schichtnetzwerkes N'_{f_i} addiert wird.

Aufgabe 38 ***mündlich***

Sei f ein maximaler Fluss in einem Netzwerk N und e eine Kante in N. Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der aus f einen maximalen Fluss im Netzwerk N' berechnet, das aus N durch

(a) Erhöhen der Kapazität von e um 1 entsteht.

(b) Erniedrigen der Kapazität von e um 1 entsteht.

Aufgabe 39 ***mündlich***

Sei f ein maximaler Fluss in einem Netzwerk N. Sei $u \neq s,t$ ein Knoten in N und sei $f(u) = \sum_{v \in V} \max\{0, f(u,v)\}$ der Fluss durch den Knoten u. Überlegen Sie sich einen möglichst effizienten Algorithmus, der aus f einen Fluss g im Netzwerk $N - u$ (d.h. der Knoten u wird aus N entfernt) der Größe $|g| \geq |f| - f(u)$ berechnet.

Aufgabe 40 Sei $N = (V,E,s,t,c)$ ein Netzwerk. ***mündlich***

Aus dem Min-Cut-Max-Flow-Theorem folgt, dass ein Fluss f in N genau dann maximal ist, wenn es einen s-t-Schnitt S gibt, so dass f für jeden s-t-Pfad P in N mindestens eine Kante in $P \cap E^+(S)$ sättigt: $\exists$ s-t-Schnitt S $\forall$ s-t-Pfade P $\exists e \in P \cap E^+(S) : f(e) = c(e)$. Geben Sie eine entsprechende Charakterisierung für blockierende Flüsse g in N an. (*Hinweis:* Verändern Sie die Reihenfolge der Quantifizierungen.)

Aufgabe 41 Sei G ein Graph. ***mündlich***

Die *Kantenzusammenhangszahl* $\lambda(G)$ von G ist die größte Zahl $\ell < n$, so dass $G - E'$ für jede Menge E' von $\ell - 1$ Kanten zusammenhängend ist. G heißt *ℓ-kantenzusammenhängend*, falls $\lambda(G) \geq \ell$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ ist.

(b) Finden Sie einen Algorithmus, der in Linearzeit testet, ob ein Graph G 2-kantenzusammenhängend ist.

(c) Finden Sie einen Algorithmus, der in Zeit $O(knm)$ testet, ob ein Graph G k-kantenzusammenhängend ist.

(d) Finden Sie einen $O(nm \min\{\lambda(G), n^{2/3}\})$ Algorithmus, der $\lambda(G)$ berechnet. *Bemerkung:* Die Laufzeit kann auf $O(nm)$ verbessert werden.

Aufgabe 42 ***10 Punkte***

(a) Die k Arbeitsgruppen eines Betriebs veranstalten ein Geschäftsessen. Um den Informationsaustausch zwischen den einzelnen Gruppen zu fördern, sollen die a_i Mitglieder jeder Arbeitsgruppe i so auf die r zur Verfügung stehenden Tische verteilt werden, dass an jedem Tisch maximal ein Mitarbeiter aus jeder Gruppe sitzt. Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der eine solche Sitzordnung berechnet (bzw. nachweist, dass es keine gibt), falls Tisch j maximal b_j Plätze hat.

Hinweis: Reduzieren Sie auf ein maximales Flussproblem.

(b) Zeigen Sie, dass das Matchingproblem für einen gegebenen bipartiten Graphen G mit Matchingzahl μ mithilfe des Algorithmus von Dinitz in Zeit $O(m\sqrt{\mu})$ gelöst werden kann.

(c) Wie groß ist die Anzahl $\alpha(n)$ aller maximalen Matchings und die Anzahl $\beta(n)$ aller Matchings im vollständigen Graphen K_n mit n Knoten?