Übungsblatt 6

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 22. Juni 2017

Aufgabe 31 ***mündlich***

Sei f ein maximaler Fluss in einem Netzwerk N. Aus N wird ein neues Netzwerk N' konstruiert, indem alle Kanten gespiegelt und die Rollen von s und t vertauscht werden. Welchen Wert hat ein maximaler Fluss f' in N'? Wie lässt sich ein solcher Fluss f' aus f gewinnen?

Aufgabe 32 ***mündlich***

Modifizieren Sie den Algorithmus von Ford-Fulkerson so, dass er auch Mindestkapazitäten von Kanten berücksichtigt. Dabei soll der Fluss durch jede Kante

(a) zwischen der Mindest- und Maximalkapazität dieser Kante liegen.

(b) entweder 0 sein oder zwischen der Mindest- und Maximalkapazität dieser Kante liegen.

Aufgabe 33 ***mündlich***

Schätzen Sie die Anzahl k der Iterationen für den Ford-Fulkerson-Algorithmus ab, wenn in jedem Schleifendurchlauf ein Zunahmepfad P_i gewählt wird, der den aktuellen Fluss f_{i-1} um einen maximalen Wert $\Delta_i = |f_i| - |f_{i-1}|$ erhöht.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\Delta_i > (|f_k| - |f_{i-1}|)/(m+1)$ ist, und folgern Sie $|f_k| - |f_i| < (|f_k| - |f_{i-1}|)/(1+1/m)$. Folgern Sie weiterhin $1 \le |f_k| - |f_{k-1}| \le |f_k|/(1+1/m)^{k-1}$ und verwenden Sie die Ungleichung $\ln x \le x - 1$.

Aufgabe 34 ***mündlich***

(a) Beweisen Sie die Kantenversion des Satzes von Menger für Digraphen $G = (V, E)$: In G ist die maximale Anzahl kantendisjunkter Wege von s nach t gleich der Größe einer minimalen Kantenmenge $E' \subseteq E$, die t von s trennt (d.h. es gibt keinen Weg von s nach t in $(V, E - E')$).

(b) Beweisen Sie die Knotenversion des Satzes von Menger für Digraphen $G = (V, E)$: Im Fall $(s, t) \notin E$ ist die maximale Anzahl von *knotendisjunkten s-t-Pfaden* (d.h. je 2 solche Pfade haben außer s und t keinen gemeinsamen Knoten) in G gleich der minimalen Größe einer Knotenmenge V', die *t in G von s trennt* (d.h. $V' \subseteq V \setminus \{s, t\}$ und es gibt keinen Weg von s nach t in $G - V'$).

Hinweis: Beweisen Sie ein Min-Cut-Max-Flow-Theorem für Netzwerke mit Kapazitätsschranken auf den Knoten.

(c) Beweisen Sie entsprechende Sätze für Graphen.

Aufgabe 35 ***mündlich***

Weisen Sie eine möglichst gute untere Laufzeitschranke für den Edmonds-Karp-Algorithmus nach, indem Sie beliebig große Netzwerke angeben, bei deren Eingabe der Algorithmus lange rechnet.

Aufgabe 36 Gegeben ist folgendes Netzwerk N. ***10 Punkte***

(a) Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Edmonds-Karp einen maximalen Fluss in N.

(b) Geben Sie einen Schnitt S mit minimaler Kapazität für N an.

(c) Interpretieren Sie die Kantenbeschriftungen von N als untere Schranken für die gesuchten Flusswerte und geben Sie einen minimalen Fluss sowie einen maximalen Schnitt an.