Graphalgorithmen
Prof. Johannes Köbler

Sommersemester 2017
1. Juni 2017

Übungsblatt 5

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15. Juni 2017

Aufgabe 26 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass sich in jedem Netzwerk $N = (V, E, s, t, c)$ ein maximaler Fluss durch eine Folge $(P_1, \ldots, P_k)$ von $k \le m$ Zunahmepfaden P_i konstruieren lässt, die nur Kanten in E enthalten.

Aufgabe 27 ***mündlich***

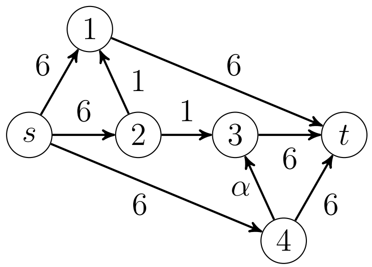
Zeigen Sie dass sich in einem beliebigen Netzwerk, in dem es einen s-t-Pfad gibt, der maximale Flusswert erhöht, wenn die Kapazität jeder Kante um 1 erhöht wird. Angenommen, der maximale Flusswert erhöht sich dadurch um k, um welchen Wert steigt dann der maximale Flusswert, wenn alle Kapazitäten um den Wert d statt 1 erhöht werden?

Aufgabe 28 ***mündlich***

(a) Passen Sie den Algorithmus von Ford-Fulkerson für den Fall an, dass das Netzwerk nicht nur eine Quelle und eine Senke enthält.

(b) Zeigen Sie, dass der Algorithmus von Ford-Fulkerson auch auf Netzwerken mit Kapazitäten in $\mathbb{Q}^+$ korrekt arbeitet. Welche Laufzeitschranke ergibt sich in diesem Fall?

(c) Arbeitet der Algorithmus von Ford-Fulkerson auch auf Netzwerken mit Kapazitäten in $\mathbb{R}^+$ korrekt?
Hinweis: Betrachten Sie die Folge der Zunahmepfade $P_1 = (s, 2, 3, t)$, $P_2 = (s, 4, 3, 2, 1, t)$, $P_3 = (s, 2, 3, 4, t)$, $P_4 = P_2$, $P_5 = (s, 1, 2, 3, t)$ und $P_i = P_{i-4}$ für $i \ge 6$ in nebenstehendem Netzwerk, wobei die Kapazität α die Gleichung $\alpha^2 + \alpha = 1$ löst.



Aufgabe 29 Sei $G = (V, E)$ ein azyklischer Digraph. ***mündlich***

(a) Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für G eine möglichst kleine Menge von disjunkten Pfaden bestimmt, die alle Knoten überdeckt.

Hinweis: Betrachten Sie den bipartiten Graphen G' mit $n+n$ Knoten, dessen $(n \times n)$-Adjazenzmatrix A' mit der Adjazenzmatrix A von G übereinstimmt, und ergänzen Sie G' zu einem geeigneten Netzwerk N mit $2n + 2$ Knoten, so dass der maximale Fluss in N die Größe $n - p$ hat. Dabei ist p die minimale Anzahl von disjunkten Pfaden, die alle Knoten überdecken.

(b) Lösen Sie Teilaufgabe (a) für den Fall, dass die berechneten Pfade nicht disjunkt sein müssen.

Hinweis: Modifizieren Sie das Netzwerk N in Teilaufgabe (a) so, dass der minimale Fluss die Größe p' hat, wobei p' die minimale Anzahl von Pfaden ist, die alle Knoten überdecken.

(c) Zwei Knoten $u, v \in V$ heißen nebenläufig (engl. *concurrent*), falls kein Pfad von u nach v und kein Pfad von v nach u existiert. Zeigen Sie, dass die maximale Größe einer Menge von nebenläufigen Knoten in G gleich p' ist (Satz von Dilworth).

(d) Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der eine Menge nebenläufiger Knoten mit maximaler Größe berechnet.

Aufgabe 30 Gegeben ist folgendes Netzwerk N. ***10 Punkte***

(a) Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Ford-Fulkerson einen maximalen Fluss f für N.

(b) Berechnen Sie die Kapazität des Schnittes $S = \{s, a, b, c\}$.

(c) Hat S minimale Kapazität? Begründen Sie.