Übungsblatt 4

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 8. Juni 2017

Aufgabe 20 Sei $1 \le k \le n$. ***mündlich***

(a) Bestimmen Sie alle Graphen G mit n Knoten und $\chi(G) = k$, die eine bzgl. Inklusion maximale Kantenmenge haben.

(b) Bestimmen Sie alle Graphen G mit n Knoten und $\chi(G) = k$, die eine maximale Anzahl von Kanten haben. Sei $e_k(n)$ diese Anzahl.

(c) Zeigen Sie, dass $e_k(n)/\binom{n}{2}$ für $n \to \infty$ gegen den Wert $1 - 1/k$ strebt.

Aufgabe 21 ***mündlich***

Bezeichne $P_G(x)$ die Anzahl der x-Färbungen eines Graphen $G = (V, E)$. Zeigen Sie:

(a) Für jede Kante $e = \{u, v\} \in E$ gilt $P_G(x) = P_{G-e}(x) - P_{G_{uv}}(x)$.

(b) $P_G(x)$ ist ein Polynom vom Grad n in der Variablen x.

(c) Falls u k-simplizial in G ist, dann gilt $P_G(x) = (x - k)P_{G-u}(x)$.

(d) Bestimmen Sie $P_G(x)$ für $G = E_n, K_n, C_n, P_n$ und jeden Baum T.

Aufgabe 22 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) `GraphSearch` gibt für jeden Graphen G eine Suchordnung von G aus.

(b) `BFS` gibt für jeden Graphen G eine BFS-Ordnung von G aus.

(c) `DFS` gibt für jeden Graphen G eine DFS-Ordnung von G aus.

Aufgabe 23 Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Es gilt $\Delta(G) \le \chi'(G) \le 2\Delta(G) - 1$.

(b) Falls G bipartit ist, gilt $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Aufgabe 24 ***mündlich***

Geben Sie einen Multigraphen $G = (V, E)$ (d.h. Kanten können in E mehrfach vorkommen) mit 3 Knoten an, für den $\chi'(G) = 9$ und $\Delta(G) = 6$ gilt.

Aufgabe 25 ***10 Punkte***

Sei $G = (V, E)$ ein Multigraph. Zeigen Sie:

(a) $\chi'(G) \le \Delta(G) + v(G)$, wobei $v(G)$ die maximale Vielfachheit (Anzahl der Vorkommen) einer Kante in E ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Vizing.

(b) $\chi'(G) \le (3/2)\Delta(G)$.

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis: Sei H ein Multigraph mit $q = \chi'(H) > (3/2)\Delta(H)$ und $\chi'(H - e) = q - 1$ für alle Kanten e von H. Verwenden Sie (a), um eine $(q - 1)$-Kantenfärbung von $H - e$ auf H zu erweitern.

(c) E lässt sich in $k = \chi'(G)$ Matchings $M_1, \ldots, M_k$ von G zerlegen, so dass $\|M_i\| - \|M_j\| \in \{-1, 0, 1\}$ für alle i, j gilt.

(d) Zwischen n Stationen sollen mehrere Datenpakete versendet werden. Jede Station kann pro Zeiteinheit höchstens ein Paket senden oder empfangen (aber nicht beides gleichzeitig). Finden Sie einen effizienten Algorithmus, der einen Zeitplan für den Versand aller Datenpakete berechnet, falls Station i insgesamt p_{ij} Pakete an Station j senden möchte. Dabei soll die Gesamtdauer die minimal nötige Zeit um höchstens $\max_{i,j} p_{ij}$ Zeiteinheiten überschreiten und die Anzahl von gleichzeitig aktiven Datenleitungen minimiert werden.

(e) Wie lässt sich in (d) eine zeitoptimale Lösung effizient bestimmen, wenn Datenpakete nur zwischen Stationen i und j mit ungleicher Parität $i \not\equiv_2 j$ versendet werden?