Übungsblatt 1

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 4. Mai 2017

Aufgabe 1 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass sich die chromatische Zahl $\chi(G)$ im Allgemeinen nicht in Abhängigkeit von der Cliquenzahl $\omega(G)$ begrenzen lässt.

Hinweis: Konstruieren hierzu Sie zu einem beliebigen Graphen G mit n Knoten und $m \geq 1$ Kanten einen Graphen H mit $\omega(H) = \omega(G)$ und $\chi(H) = \chi(G) + 1$.

Erweitern Sie G zu einem Graphen H mit $2n+1$ Knoten, indem Sie zu jedem Knoten u in G einen Doppelgänger u' mit $N_H(u') = N_G(u)$ und anschließend noch einen neuen Knoten x hinzufügen.

Aufgabe 2 ***mündlich***

Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für jeden zusammenhängenden Graphen G eine $(\Delta(G)+1)$-Färbung c berechnet, sodass höchstens ein Knoten u eine Farbe $c(u) > \deg(u)$ erhält.

Aufgabe 3 ***mündlich***

Wieviele Kanten hat ein ebener Graph mit n Knoten, wenn jedes seiner Gebiete von d Kanten begrenzt ist?

Aufgabe 4 ***mündlich***

Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für ein Tripel $G = (V, E, R)$ überprüft, ob G ein ebener Graph ist.

Aufgabe 5 ***mündlich***

Sei $G = (V, E)$ ein *maximal planarer* Graph (d.h. G ist planar und $(V, E \cup e)$ ist für jede Kante $e \in \binom{V}{2} \setminus E$ nicht planar) und sei H eine ebene Realisierung von G. Zeigen Sie:

(a) Falls G $n \geq 3$ Knoten hat, wird jedes Gebiet g von H von $d(g) = 3$ Kanten umrandet und somit ist $m = 3n - 6$.

(b) Falls $n \geq 4$ ist, hat jeder Knoten $u \in V$ einen Grad $\deg(u) \geq 3$ und mindestens 4 Knoten haben einen Grad ≤ 5. *Hinweis:* Zeigen Sie, dass $\sum_{u \in V}(6 - \deg(u)) = 12$ ist.

(c) Falls $n \geq 3$ ist, gibt es für jedes Gebiet g von H eine Einbettung von G in die Ebene, in der g das äußere Gebiet ist und jedes andere Gebiet g' ein Dreieck bildet. *Hinweis:* Führen Sie Induktion über n und zeigen Sie, dass jedes überschneidungsfreie Polygon P mit ≤ 5 Eckpunkten einen Punkt A enthält, so dass für jeden Punkt B in P die Strecke $[AB]$ innerhalb von P verläuft.

(d) Jeder planare Graph ist geradlinig in die Ebene einbettbar.

Aufgabe 6 ***mündlich***

Zwei Graphen G und H heißen *homeomorph*, falls Unterteilungen G' von G und H' von H existieren mit $G' \cong H'$. Zeigen Sie:

(a) Geben Sie einen Graphen an, der nicht K_5-frei ist und keinen zu K_5 homeomorphen Teilgraphen hat.

(b) Geben Sie einen Graphen an, der nicht planar und nicht zu K_5 oder $K_{3,3}$ kontrahierbar ist.

(c) Falls K_5 oder $K_{3,3}$ Minoren von G sind, dann ist ein Teilgraph von G homeomorph zu K_5 oder $K_{3,3}$.

(d) Genau die $\{K_5, K_{3,3}\}$-freien Graphen sind planar (Satz von Wagner).

Aufgabe 7 ***10 Punkte***

(a) Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für einen gegebenen planaren Graphen G eine 5-Färbung berechnet.

(b) Wieviele Farben benutzt Ihr Algorithmus, falls $\omega(G) \leq 2$ ist?