Übungsblatt 11

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 8. Juli 2015

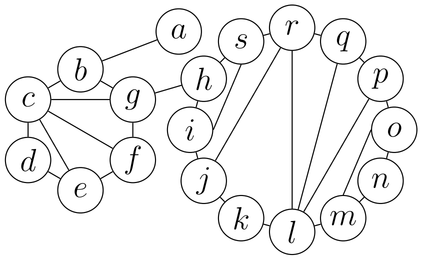
Aufgabe 64 ***mündlich***

(a) Sei `LexBFS'` die Variante von `LexBFS`, die immer einen Knoten maximalen Grades aus der ersten Menge der Warteschlange auswählt. Sei A die augmentierte Adjazenzmatrix des Eingabegraphen, d.h. die Einträge auf der Hauptdiagonale sind auf 1 gesetzt. Zeigen Sie, dass wenn die Zeilen und Spalten von A gemäß der durch `LexBFS'` gefundenen Reihenfolge angeordnet werden, die Zeilen von A lexikographisch sortiert sind.

(b) Zeigen Sie, dass `LexBFS'` in Linearzeit implementiert werden kann.

Aufgabe 65 ***mündlich***

(a) Geben Sie für den nebenstehenden outerplanaren Graphen G eine Baumzerlegung der Weite 2 an.



(b) Zeigen Sie, dass jeder outerplanare Graph Baumweite höchstens 2 hat.

(c) Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der für einen mit outerplanarer Realisierung gegebenen Graphen eine Baumzerlegung minimaler Weite berechnet.

(d) Geben Sie einen planaren Graphen mit Baumweite 2 an, der nicht outerplanar ist.

(e) Zeigen Sie, dass es für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen planaren Graphen mit Baumweite mindestens k gibt.

Aufgabe 66 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass das Hamiltonkreisproblem FPT in der Baumweite des Eingabegraphen ist.

Aufgabe 67 ***mündlich***

Entwerfen Sie eine Datenstruktur, mit der zwei Knoten eines planaren Graphens in $O(1)$ Zeit auf Adjazenz getestet werden können, die $O(n+m)$ Platz benötigt und die in $O(n+m)$ Zeit aus einer Adjazenzlistendarstellung berechnet werden kann.

Aufgabe 68 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass ein Graph G genau dann ein Intervallgraph ist, falls G chordal und $\overline{G}$ transitiv orientierbar ist.

Aufgabe 69 ***mündlich***

Eine Intervalrepräsentation $\mathcal{I} = (I_v)_{v \in V}$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist *proper*, wenn $I_u \not\subseteq I_v$ für alle $u, v \in V$ mit $u \neq v$ gilt. Wenn zusätzlich alle Intervalle die gleiche Länge haben, so heißt $\mathcal{I}$ *unit*. Zeigen Sie, dass jeder Graph $G = (V, E)$ mit einer proper Intervallrepräsentation $\mathcal{I}$ auch eine unit Intervallrepräsentation $\mathcal{I}'$ hat.

Hinweis: Für $u, v \in V$ sei $u <_{\mathcal{I}} v$ falls $I_u < I_v$ und sei $u_{\min}$ der kleinste Knoten bezüglich $<_{\mathcal{I}}$. Falls G zusammenhängend ist, sei $T_{\mathcal{I}}$ der Baum, in dem jeder Knoten $u \in V$ Kind seines bezüglich $<_{\mathcal{I}}$ kleinsten Nachbarn in G ist. Sei $p(u)$ die Position des Knoten u in der postorder-Traversierung von T, bei der die Kinder jedes Knoten in der durch $<_{\mathcal{I}}$ gegebenen Reihenfolge besucht werden. Zeigen Sie, dass $\Big([d(u_{\min}, u) \cdot n + p(u), (d(u_{\min}, u) + 1) \cdot n + p(u)]\Big)_{u \in V}$ eine unit Intervallrepräsentation von G ist.

Aufgabe 70 ***10 Punkte***

Geben Sie einen Linearzeitalgorithmus an, der für einen gegebenen Graphen G entscheidet, ob dieser chordal ist, und im positiven Fall eine Baumzerlegung von G in Cliquen berechnet.

Hinweis: Verwenden Sie `LexBFS`.