Übungsblatt 10

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 1. Juli 2015

Aufgabe 57 ***mündlich***

Sei $G = (V, E)$ ein 3-fach zusammenhängender Graph mit $n \geq 5$ Knoten. Zeigen Sie:

(a) G hat eine Kante $\{u, v\}$, so dass G_{uv} 3-fach zusammenhängend ist.

Hinweis: Wählen Sie unter der Annahme, dass es zu jeder Kante $\{u, v\}$ einen Knoten w gibt, so dass $G - \{u, v, w\}$ unzusammenhängend ist, u, v, w so, dass $G - \{u, v, w\}$ eine Komponente mit maximaler Knotenzahl hat, und finden Sie eine Kante $\{x, w\}$ und einen Knoten y, so dass $G - \{x, w, y\}$ eine größere Komponente hat.

(b) Falls $G' = G_{uv}$ für eine Kante $\{u, v\} \in E$ 3-fach zusammenhängend ist, und sich eine ebene Realisierung H' von G' nicht zu einer ebenen Realisierung H von G erweitern lässt, so enthält der Teilgraph $G[\{u, v\} \cup N(u) \cup N(v)]$ eine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$.

(c) Geben Sie einen Polynomialzeitalgorithmus A an, der bei Eingabe von G entweder eine ebene Realisierung oder einen Teilgraphen von G ausgibt, der eine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ ist.

(d) A lässt sich zu einem Polynomialzeitalgorithmus B für beliebige Graphen erweitern.

Hinweis: Betrachten Sie maximale Mengen V_i von Knoten, sodass zwischen allen $u, v \in V_i$ mit $u \neq v$ 3 disjunkte Pfade existieren.

Aufgabe 58 ***mündlich***

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender chordaler Graph und sei S ein minimaler Separator von G. Zeigen Sie, dass jede Komponente $G[V_i]$ von $G - S$ einen Knoten $x_i \in V_i$ enthält mit $S \subseteq N(x_i)$.

Hinweis: Zeigen Sie per Induktion die Aussage für jede Teilmenge $T \subseteq S$.

Aufgabe 59 ***mündlich***

Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine perfekte Eliminationsordnung eines Graphen $G = (V, E)$ und sei $H = (V, F)$ die sich daraus ergebende Orientierung von G, d.h. $(v_i, v_j) \in F \Leftrightarrow \{v_i, v_j\} \in E \wedge i < j$. Zeigen Sie, dass H kreisfrei ist und dass jede topologische Sortierung von H ebenfalls eine perfekte Eliminationsordnung von G ist.

Aufgabe 60 Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. ***mündlich***

Zeigen Sie, dass $tw(G) \leq k$ genau dann gilt, wenn ein k-Baum H existiert, der G als Teilgraphen enthält.

Aufgabe 61 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass ein Graph $G = (V, E)$ genau dann ein k-Baum ist, wenn

(i) G zusammenhängend ist,
(ii) G eine k-Clique aber keine $(k + 2)$-Clique enthält und
(iii) jeder minimale Separator von G eine k-Clique ist.

Aufgabe 62 ***mündlich***

Zeigen Sie $\chi(G) \leq tw(G) + 1$, indem Sie einen Linearzeitalgorithmus angeben, der für eine gegebene Baumzerlegung (T, X) eines Graphen G eine $\big(w(T, X) + 1\big)$-Färbung von G berechnet.

Aufgabe 63 ***10 Punkte***

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ heißt *dominierend*, wenn jeder Knoten $v \in V \setminus U$ einen Nachbarn in U hat. Geben Sie einen möglichst Algorithmus an, der bei Eingabe von G, einer Baumzerlegung (T, X) von G der Weite w und einer Kostenfunktion $c\colon V \to \mathbb{N}$ eine dominierende Menge U von G mit minimalen Kosten $c(U) = \sum_{v \in U} c(v)$ berechnet. Die Laufzeit des Algorithmus soll die Form $O(f(w)n)$ haben.