Übungsblatt 9

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 24. Juni 2015

Aufgabe 52 ***mündlich***

Seien $H = (V, E, R)$ und $H' = (V, E, S)$ ebene Realisierungen eines Graphen $G = (V, E)$. H und H' heißen *äquivalent*, wenn $R \in \{S, S^R\}$ ist (d.h. $R = S$ oder R entsteht aus S durch Spiegelung aller Ränder).

(a) Finden Sie einen Graphen mit möglichst wenigen Knoten (Kanten), der mindestens 2 inäquivalente ebene Realisierungen hat.

(b) Zeigen Sie, dass $\kappa(G) \leq 2$ ist, falls es in H ein Gebiet gibt, dessen Kanten einen Kreis mit mindestens 2 Brücken in G bilden.

(c) Zeigen Sie, dass jedes Gebiet g in H, das höchstens eine Brücke hat, äquivalent zu einem Gebiet g' in H' ist (d.h. $g = g'$ oder g entsteht aus g' durch Spiegelung des Randes).

(d) Zeigen Sie, dass alle ebenen Realisierungen eines 3-fach zusammenhängenden Graphen G äquivalent sind (Satz von Whitney).

Aufgabe 53 Sei $G = (V, E)$ ein Graph. ***mündlich***

Bezeichne $P_G(x)$ die Anzahl der x-Färbungen von G. Zeigen Sie:

(a) Für jede Kante $e = \{u, v\} \in E$ gilt $P_G(x) = P_{G-e}(x) - P_{G_{uv}}(x)$.

(b) $P_G(x)$ ist ein Polynom vom Grad n in der Variablen x.

(c) Falls u k-simplizial in G ist, dann gilt $P_G(x) = (x - k)P_{G-u}(x)$.

(d) Bestimmen Sie $P_G(x)$ für $G = E_n, K_n, C_n, P_n$ und jeden Baum T.

Aufgabe 54 ***mündlich***

(a) Geben Sie einen regulären Graphen an, der ein perfektes Matching besitzt, aber nicht 1-faktorisierbar ist (vgl. Aufgabe 18).

(b) Zeigen Sie, dass ein regulärer Graph G genau dann 1-faktorisierbar ist, wenn $\chi'(G) = \Delta(G)$ ist.

Aufgabe 55 Sei $1 \leq k \leq n$. ***mündlich***

(a) Bestimmen Sie alle Graphen G mit n Knoten und $\chi(G) = k$, die eine bzgl. Inklusion maximale Kantenmenge haben.

(b) Bestimmen Sie alle Graphen G mit n Knoten und $\chi(G) = k$, die eine maximale Anzahl von Kanten haben. Sei $e_k(n)$ diese Anzahl.

(c) Zeigen Sie, dass $e_k(n)/\binom{n}{2}$ für $n \to \infty$ gegen den Wert $1 - 1/k$ strebt.

Aufgabe 56 ***10 Punkte***

Sei $G = (V, E)$ ein Multigraph (d.h. E ist eine Multimenge). Zeigen Sie:

(a) $\chi'(G) \leq \Delta(G) + v(G)$, wobei $v(G)$ die maximale Vielfachheit einer Kante in E ist.

(b) $\chi'(G) \leq (3/2)\Delta(G)$. *Hinweis:* Führen Sie einen Widerspruchsbeweis: Sei H ein Multigraph mit $q = \chi'(H) > (3/2)\Delta(H)$ und $\chi'(H - e) = q - 1$ für alle Kanten e von H. Verwenden Sie (a), um eine $(q-1)$-Kantenfärbung von $H - e$ auf H zu erweitern.

(c) E lässt sich in $k = \chi'(G)$ Matchings $M_1, \ldots, M_k$ von G zerlegen, so dass $\|M_i\| - \|M_j\| \in \{-1, 0, 1\}$ für alle i, j gilt.

(d) Zwischen n Stationen sollen mehrere Datenpakete versendet werden. Jede Station kann pro Zeiteinheit höchstens ein Paket senden oder empfangen (aber nicht beides gleichzeitig). Finden Sie einen effizienten Algorithmus, der einen Zeitplan für den Versand aller Datenpakete berechnet, falls Station i insgesamt p_{ij} Pakete an Station j senden möchte. Dabei soll die Gesamtdauer die minimal nötige Zeit um höchstens $\max_{i,j} p_{ij}$ Zeiteinheiten überschreiten und die Anzahl von gleichzeitig aktiven Datenleitungen minimiert werden.

(e) Wie lässt sich in (d) eine zeitoptimale Lösung effizient bestimmen, wenn Datenpakete nur zwischen Stationen i und j mit ungleicher Parität $i \not\equiv_2 j$ versendet werden?