Übungsblatt 8

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 17. Juni 2015

Aufgabe 45 ***mündlich***
An einem Turnier nehmen n Teams teil, die alle gegeneinander spielen sollen. Jedes Team darf pro Tag höchstens ein Spiel absolvieren. Bestimmen Sie die minimale Dauer des Turniers in Abhängigkeit von n.

Aufgabe 46 ***mündlich***

(a) Finden Sie einen Linearzeitalgorithmus, der für einen gegebenen planaren Graphen G eine 5-Färbung berechnet.

(b) Wieviele Farben benutzt Ihr Algorithmus, falls $\omega(G) \leq 2$ ist?

Aufgabe 47 ***mündlich***
Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für ein Tripel $G = (V, E, R)$ überprüft, ob G ein ebener Graph ist.

Aufgabe 48 Sei G zusammenhängend und nicht planar. ***mündlich***
Zeigen Sie: Falls G nicht 3-fach zusammenhängend ist, dann ist G zu einem nicht planaren Graphen mit weniger Kanten kontrahierbar.

Aufgabe 49 ***mündlich***
Sei $G = (V, E)$ ein *maximal planarer* Graph (d.h. G ist planar und $(V, E \cup e)$ ist für jede Kante $e \in \binom{V}{2} \setminus E$ nicht planar) und sei H eine ebene Realisierung von G. Zeigen Sie:

(a) Falls G $n \geq 3$ Knoten hat, wird jedes Gebiet g von H von $d(g) = 3$ Kanten umrandet und somit ist $m = 3n - 6$.

(b) Falls $n \geq 4$ ist, hat jeder Knoten $u \in V$ einen Grad $\deg(u) \geq 3$ und mindestens 4 Knoten haben einen Grad ≤ 5. *Hinweis:* Zeigen Sie, dass $\sum_{u\in V}(6 - \deg(u)) = 12$ ist.

(c) Falls $n \geq 3$ ist, gibt es für jedes Gebiet g von H eine Einbettung von G in die Ebene, in der g das äußere Gebiet ist und jedes andere Gebiet g' ein Dreieck bildet. *Hinweis:* Führen Sie Induktion über n und zeigen Sie, dass jedes überschneidungsfreie Polygon P mit ≤ 5 Eckpunkten einen Punkt A enthält, so dass für jeden Punkt B in P die Strecke $[AB]$ innerhalb von P verläuft.

(d) Jeder planare Graph ist geradlinig in die Ebene einbettbar.

Aufgabe 50 ***mündlich***
Zwei Graphen G und H heißen *homeomorph*, falls Unterteilungen G' von G und H' von H existieren mit $G' \cong H'$. Zeigen Sie:

(a) Geben Sie einen Graphen an, der nicht K_5-frei ist und keinen zu K_5 homeomorphen Teilgraphen hat.

(b) Geben Sie einen Graphen an, der nicht planar und nicht zu K_5 oder $K_{3,3}$ kontrahierbar ist.

(c) Falls K_5 oder $K_{3,3}$ Minoren von G sind, dann ist ein Teilgraph von G homeomorph zu K_5 oder $K_{3,3}$.

(d) Genau die $\{K_5, K_{3,3}\}$-freien Graphen sind planar (Satz von Wagner).

Aufgabe 51 ***10 Punkte***
Ein Graph G heißt *outerplanar*, falls G eine ebene Realisierung hat, in der alle Knoten an das äußere Gebiet grenzen. Zeigen Sie:

(a) G ist genau dann outerplanar, wenn G $\{K_4, K_{2,3}\}$-frei ist.

(b) Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der prüft, ob G outerplanar ist und im positiven Fall eine $\chi(G)$-Färbung berechnet.