Übungsblatt 5

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 27. Mai 2015

Aufgabe 29 ***mündlich***

Ein Teilgraph W eines Graphen $G = (V, E)$ heißt *Spannwald*, falls er alle Knoten von G enthält und ein Wald (also kreisfrei) ist. Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für einen gegebenem Graphen G einen Spannwald W mit möglichst wenigen Kanten bestimmt, der nicht mehr isolierte Knoten als G hat.

Aufgabe 30 ***mündlich***

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Sei $A \subseteq V$ eine unabhängige Knotenmenge, so dass $\deg(a) \geq \deg(b)$ für alle Knoten $a \in A$ und $b \in N(A)$ gilt. Zeigen Sie, dass G ein Matching M hat, das keinen Knoten in A frei lässt.

Aufgabe 31 ***mündlich***

(a) Beweisen Sie die Knotenversion des Satzes von Menger für Digraphen $G = (V, E)$: Im Fall $(s, t) \notin E$ ist die maximale Anzahl von *knotendisjunkten* s-t-Pfaden (d.h. je 2 solche Pfade haben außer s und t keinen gemeinsamen Knoten) gleich der minimalen Größe einer Knotenmenge V', die *t von s trennt* (d.h. $V' \subseteq V \setminus \{s, t\}$ und es gibt keinen Weg von s nach t in $G - V'$).

Hinweis: Beweisen Sie ein Min-Cut-Max-Flow-Theorem für Netzwerke mit Kapazitätsschranken auf den Knoten.

(b) Beweisen Sie einen entsprechenden Satz für Graphen.

(c) Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für einen Digraphen $G = (V, E)$ und zwei Knoten $s, t \in V$ mit $(s, t) \notin E$ eine Menge A von knotendisjunkten s-t-Pfaden und eine t von s trennende Knotenmenge V' mit $\|A\| = \|V'\|$ berechnet.

(d) Finden Sie entsprechende Algorithmen für die anderen 3 Versionen des Satzes von Menger (siehe Teilaufgabe (b) und Aufgabe 4).

Aufgabe 32 ***mündlich***

Die *Zusammenhangszahl* $\kappa(G)$ eines Graphen G ist die größte Zahl $k < n$, so dass $G - V'$ für jede Menge V' von $k - 1$ Knoten zusammenhängend ist. G heißt *k-fach zusammenhängend*, falls $\kappa(G) \geq k$ ist.

(a) Beweisen Sie den Satz von Whitney: G ist genau dann *k-fach zusammenhängend*, wenn je zwei Knoten in G durch mindestens k knotendisjunkte Pfade verbunden sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\kappa(G) \leq 2m/n$ ist.

(c) Finden Sie einen Algorithmus, der $\kappa(G)$ in Zeit $O(\sqrt{n^5}m)$ berechnet.

(d) Verbessern Sie die Laufzeit auf $O(\sqrt{n}m^2)$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass es genügt $\mathcal{O}(\kappa(G)n)$ Knotenpaare zu betrachten.

Aufgabe 33 ***10 Punkte***

Gegeben sind k Arbeiter $A_1, \ldots, A_k$ und ℓ Maschinen $M_1, \ldots, M_\ell$ sowie eine Menge $E \subseteq \{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, \ell\}$ von Jobs.

(a) Zeigen Sie, dass jeder bipartite Graph $G = (V_1, V_2, E)$ ein Matching M besitzt, in dem kein Knoten u vom Grad $\deg(u) = \Delta(G)$ frei bleibt. (*Hinweis:* Konstruieren Sie M aus 2 Matchings M_i $(i = 1, 2)$, die keinen Knoten $u \in V_i$ vom Grad $\deg(u) = \Delta(G)$ frei lassen. Bei der Konstruktion von M_i können Sie sich an Aufgabe 30 orientieren.)

(b) Bestimmen Sie die Zeit, die zur Erledigung aller Jobs in E benötigt wird, falls jeder Job $(i, j) \in E$ in einer Zeiteinheit und zwar nur von Arbeiter A_i an Maschine M_j erledigt werden kann und jeder Arbeiter und jede Maschine in jeder Zeiteinheit maximal einen Job übernehmen kann. *Hinweis:* Teilaufgabe (a).

(c) Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der einen Zeitplan zur Erledigung aller Jobs in minimaler Zeit erstellt.