Übungsblatt 4

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 27. Mai 2015

Aufgabe 21 ***mündlich***
Zeigen Sie, dass sich der Abstand $d_{i+1}(s,t)$ zwischen s und t im Restnetzwerk N_{f_i} gegenüber $d_i(s,t)$ nicht unbedingt vergrößert, wenn auf den aktuellen Fluss f_{i-1} ein blockierender Fluss g_i des gesamten Restnetzwerks $N_{f_{i-1}}$ addiert wird.

Aufgabe 22 Sei $N = (V, E, s, t, c)$ ein Netzwerk. ***mündlich***
Aus dem Min-Cut-Max-Flow-Theorem folgt, dass ein Fluss f in N genau dann maximal ist, wenn es einen s-t-Schnitt S gibt, so dass f für jeden s-t-Pfad P in N mindestens eine Kante in $P \cap E^+(S)$ sättigt: $\exists$ s-t-Schnitt S $\forall$ s-t-Pfade P $\exists e \in P \cap E^+(S) : f(e) = c(e)$. Geben Sie eine entsprechende Charakterisierung für blockierende Flüsse g in N an. (*Hinweis:* Verändern Sie die Reihenfolge der Quantifizierungen.)

Aufgabe 23 ***mündlich***
Zeigen Sie, dass das Matchingproblem für einen gegebenen bipartiten Graphen G mit Matchingzahl μ mithilfe des Algorithmus von Dinic in $O(m\sqrt{\mu})$ Zeit gelöst werden kann.

Aufgabe 24 ***mündlich***
Schätzen Sie die Laufzeit des Algorithmus von Dinic in Abhängigkeit von der Kantenzahl m und der maximalen Kantenkapazität C ab.

Aufgabe 25 ***mündlich***
Zeigen Sie, dass ein Baum höchstens ein perfektes Matching hat.

Aufgabe 26 ***mündlich***

(a) Zeigen Sie, dass es zu jedem OSC S in einem Graphen G eine Knotenüberdeckung U mit $\|U\| \leq 2\mathit{weight}(S)$ gibt. Ist diese Schranke scharf?

(b) Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der in einem gegebenen Graphen G eine Knotenüberdeckung findet, die höchstens doppelt so groß wie eine minimale Knotenüberdeckung ist.

Aufgabe 27 ***mündlich***
Modifizieren Sie den Algorithmus von Edmonds so, dass er für einen gegebenem Graphen G und ein gegebenes Matching M in G ein Matching M' mit $M \subseteq M'$ berechnet, das maximale Größe unter allen solchen Matchings hat.

Aufgabe 28 ***10 Punkte***
Für ein Matching M in einem Graphen $G = (V, E)$ bezeichne $\mathit{free}(M) = n - 2\|M\|$ die Anzahl der freien Knoten bzgl. M. Für eine Teilmenge $A \subseteq V$ bezeichne $\mathit{odd}(G - A)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in $G - A$ mit einer ungeraden Knotenzahl. Zeigen Sie:

(a) Für jedes Matching M in G und jede Teilmenge $A \subseteq V$ gilt $\mathit{free}(M) \geq \mathit{odd}(G - A) - \|A\|$.

(b) Ein Matching M ist genau dann maximal, wenn es eine Teilmenge $A \subseteq V$ mit $\mathit{free}(M) = \mathit{odd}(G - A) - \|A\|$ gibt. Wir nennen eine solche Menge A ein *Zertifikat* für (die Optimalität von) M. (*Hinweis:* Konstruieren Sie A mithilfe eines OSC mit Gewicht $\mathit{weight}(S) = \|M\|$.)

(c) Modifizieren Sie den Algorithmus von Edmonds so, dass er nicht nur ein maximales Matching M, sondern auch ein Zertifikat für M ausgibt. Wie verarbeitet Ihr Algorithmus die Eingabe $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, 12\}$ und $E = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{4,7\}, \{5,6\}, \{5,12\}, \{6,7\}, \{7,8\}, \{7,11\}, \{8,9\}, \{8,10\}, \{9,10\}\}$?

(d) Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ und zwei Mengen $M \subseteq E$, $A \subseteq V$ überprüft, ob A ein Zertifikat für das maximale Matching M ist.