Übungsblatt 3

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 20. Mai 2015

Aufgabe 12 ***mündlich***

Sei f ein maximaler Fluss in einem Netzwerk N und e eine Kante in N. Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der aus f einen maximalen Fluss im Netzwerk N' berechnet, das aus N durch

(a) Erhöhen der Kapazität von e um 1 entsteht.

(b) Erniedrigen der Kapazität von e um 1 entsteht.

Aufgabe 13 ***mündlich***

Sei f ein maximaler Fluss in einem Netzwerk N. Sei $u \neq s, t$ ein Knoten in N und sei $f(u) = \sum_{v \in V} \max\{0, f(u, v)\}$ der Fluss durch den Knoten u. Überlegen Sie sich einen möglichst effizienten Algorithmus, der aus f einen Fluss g im Netzwerk $N - u$ (d.h. der Knoten u wird aus N entfernt) der Größe $|g| \geq |f| - f(u)$ berechnet.

Aufgabe 14 ***mündlich***

Weisen Sie eine möglichst gute untere Laufzeitschranke für den Edmonds-Karp-Algorithmus nach, indem Sie beliebig große Netzwerke angeben, bei deren Eingabe der Algorithmus lange rechnet.

Aufgabe 15 ***mündlich***

Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der ein maximales Matching für einen gegebenen Baum bestimmt.

Aufgabe 16 ***mündlich***

Welche Laufzeit hat der Algorithmus von Edmonds bei einem bipartiten Graphen? Lässt sich der Algorithmus in diesem Fall vereinfachen?

Aufgabe 17 ***mündlich***

(a) Zeigen Sie, dass in einem bipartiten Graphen die maximale Größe eines Matchings gleich der minimalen Größe einer Knotenüberdeckung (engl. vertex cover) ist (Satz von König).

Hinweis: Zeigen Sie, dass in einem bipartiten Graphen zu jedem OSC (odd set cover) eine Knotenüberdeckung mit demselben Gewicht existiert.

(b) Überlegen Sie sich einen Algorithmus, der aus einem maximalen Matching in einem bipartiten Graphen eine minimale Knotenüberdeckung berechnet.

(c) Beweisen Sie den Heiratssatz: Ein bipartiter Graph $G = (A, B, E)$ besitzt genau dann ein Matching, das keinen Knoten in A frei lässt, wenn $\|N(A')\| \geq \|A'\|$ für jede Teilmenge $A' \subseteq A$ gilt. (*Hinweis:* Benutzen Sie den Satz von König.)

Aufgabe 18 ***mündlich***

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *k-faktorisierbar*, wenn sich seine Kantenmenge so in $l \geq 0$ Teilmengen $E = E_1 \cup \cdots \cup E_l$ partitionieren lässt, dass die Graphen $G_i = (V, E_i)$ für $i = 1, \ldots, l$ k-regulär sind (d.h. jeder Knoten $v \in V$ hat in G_i den Grad k). Zeigen Sie, dass jeder reguläre bipartite Graph 1-faktorisierbar ist. (*Hinweis:* Benutzen Sie den Heiratssatz.)

Aufgabe 19 ***6 Punkte***

Seien $A = \{A_1, \ldots, A_k\}$ und $B = \{B_1, \ldots, B_k\}$ Partitionen einer n-elementigen Menge V. Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der eine k-elementige Teilmenge $R \subseteq V$ berechnet, die sowohl ein Repräsentantensystem für A als auch für B ist. Falls eine solche Menge nicht existiert, soll Ihr Algorithmus ein leicht zu verifizierendes Zertifikat für ihre Nichtexistenz ausgeben.

Aufgabe 20 ***4 Punkte***

Wie groß ist die Anzahl $\alpha(n)$ aller maximalen Matchings und die Anzahl $\beta(n)$ aller Matchings im vollständigen Graphen K_n mit n Knoten?